Úterý, 9. dubna 2019

Úloha 1. Určete všechny trojice (a, b, c) reálnych čísel, pro něž platí $ab + bc + ca = 1$ a současně

$$a^2b + c = b^2c + a = c^2a + b.$$

Úloha 2. Je dáno kladné celé číslo n. Na čtvercovou tabulku $2n \times 2n$ jsou umístěna domina tak, že každé pole této tabulky je sousední s právě jedním polem pokrytým dominem. Pro každé n určete největší počet domin, které takto můžeme umístit na tuto tabulku.

(*Dominem* rozumíme obdélník 2×1 nebo 1×2. Domina jsou umísťovaná na tabulku tak, že každé domino pokrývá právě dvě pole tabulky a jednotlivá domina se nepřekrývají. Dvě pole tabulky jsou *sousední*, právě když jsou různá a mají společnou stranu.)

Úloha 3. Je dán trojúhelník ABC, v němž $|\angle CAB| > |\angle ABC|$. Označme I střed kružnice jemu vepsané. Nechť D je bod úsečky BC, pro který platí $|\angle CAD| = |\angle ABC|$. Označme ω kružnici, která se dotýká přímky AC v bodě A a prochází bodem I. Nechť X ($X \neq A$) je průsečík kružnice ω a kružnice opsané trojúhelníku ABC. Dokažte, že osy úhlů DAB a CXB se protínají na přímce BC.

Čas: 4 hodiny a 30 minút
Každá úloha je hodnocena nejvýše 7 body.