



EGMO 2018  
Florence | April 9<sup>th</sup>-15<sup>th</sup>

Language: Serbian

Day: 2

četvrtak, 12.4.2018.

**Zadatak 4.** *Domina* je pločica dimenzija  $1 \times 2$  ili  $2 \times 1$ .

Neka je  $n \geq 3$  prirodan broj. Domine su postavljene na tablu dimenzija  $n \times n$  tako da svaka domina pokriva tačno dva polja table, i domine se ne preklapaju.

Vrednost vrste, odnosno kolone, je broj domina koje pokrivaju bar jedno polje u toj vrsti, odnosno koloni. Konfiguraciju nazivamo *balansiranom* ako postoji  $k \geq 1$  tako da svaka vrsta i svaka kolona ima vrednost  $k$ .

Dokazati da balansirana konfiguracija postoji za svako  $n \geq 3$ , i naći najmanji broj domina potrebnih za takvu konfiguraciju.

**Zadatak 5.** Neka je  $\Gamma$  kružnica opisana oko trougla  $ABC$ . Kružnica  $\Omega$  tangira duž  $AB$  i tangira kružnicu  $\Gamma$  u tački koja je sa iste strane prave  $AB$  kao i  $C$ . Simetrala ugla  $\angle BCA$  seče  $\Omega$  u dve različite tačke  $P$  i  $Q$ .

Dokazati  $\angle ABP = \angle QBC$ .

**Zadatak 6.**

(a) Dokazati da za svaki realan broj  $t$  za koji važi  $0 < t < \frac{1}{2}$  postoji prirodan broj  $n$  koji zadovoljava sledeće: Za svaki skup  $S$  koji sadrži  $n$  prirodnih brojeva postoje dva različita elementa  $x$  i  $y$  skupa  $S$ , i *nenegativan* ceo broj  $m$  (tj.  $m \geq 0$ ), tako da

$$|x - my| \leq ty.$$

(b) Utvrditi da li za svaki realan broj  $t$  za koji važi  $0 < t < \frac{1}{2}$  postoji beskonačan skup  $S$  koji sadrži prirodne brojeve tako da

$$|x - my| > ty$$

važi za svaki par različitih elemenata  $x$  i  $y$  skupa  $S$  i svaki *prirodan* broj  $m$  (tj.  $m > 0$ ).