



EGMO 2018
Florence | April 9th-15th

Language: Romanian

Day: 2

Joi, 12 aprilie, 2018

Problema 4. Un *domino* este o piesă dreptunghiulară de dimensiuni 1×2 sau 2×1 .

Fie $n \geq 3$ un număr întreg. Pe o tablă $n \times n$ se așează câteva dominouri, astfel încât fiecare domino acoperă exact două pătrățele ale tablei, iar dominourile nu se suprapun.

Valoarea unei linii sau a unei coloane este numărul dominourilor care acoperă cel puțin un pătrățel al acelei linii sau coloane. Configurația se numește *echilibrată* dacă există un număr $k \geq 1$ astfel încât fiecare linie și fiecare coloană are valoarea k .

Demonstrați că pentru fiecare $n \geq 3$ există o configurație echilibrată și determinați numărul minim de dominouri necesare într-o astfel de configurație.

Problema 5. Fie Γ cercul circumscris triunghiului ABC . Un cerc Ω este tangent segmentului AB și este tangent la Γ într-un punct situat de aceeași parte a dreptei AB ca și C . Biseectoarea unghiului $\angle BCA$ intersectează Ω în două puncte diferite P și Q .

Demonstrați că $\angle ABP = \angle QBC$.

Problema 6.

(a) Demonstrați că pentru orice număr real t , cu $0 < t < \frac{1}{2}$, există un număr întreg strict pozitiv n cu următoarea proprietate: pentru orice mulțime S formată din n numere întregi strict pozitive există două elemente diferite x și y ale lui S și un număr întreg *nenegativ* m (i.e. $m \geq 0$), astfel încât

$$|x - my| \leq ty.$$

(b) Decideți dacă pentru orice număr real t , cu $0 < t < \frac{1}{2}$, există o mulțime infinită S de numere întregi strict pozitive astfel încât

$$|x - my| > ty,$$

oricare ar fi perechea de elemente diferite x și y ale lui S și oricare ar fi numărul întreg *strict pozitiv* m (i.e. $m > 0$).