



EGMO 2018  
Florence | April 9<sup>th</sup>-15<sup>th</sup>

Language: Portuguese

Day: 2

Quinta-feira, 12 de abril de 2018

**Problema 4.** Um *dominó* é uma peça de tamanho  $1 \times 2$  ou  $2 \times 1$ .

Seja  $n \geq 3$  um inteiro. Dominós são colocados em um tabuleiro quadriculado  $n \times n$  de maneira que cada dominó cobre exatamente 2 casas do tabuleiro e os dominós não se sobrepõem.

O *valor* de uma linha ou coluna do tabuleiro é o número de dominós que cobre pelo menos uma casa dessa linha ou coluna. Uma configuração de dominós no tabuleiro é chamada *balanceada* se existe algum  $k \geq 1$  tal que cada linha e cada coluna tem valor  $k$ .

Prove que uma configuração balanceada existe para todo  $n \geq 3$ , e encontre o menor número de dominós necessários para tal configuração.

**Problema 5.** Seja  $\Gamma$  o circuncírculo do triângulo  $ABC$ . A circunferência  $\Omega$  é tangente ao segmento  $AB$  e é tangente a  $\Gamma$  em um ponto que fica no mesmo lado da reta  $AB$  que o ponto  $C$ . A bissetriz de  $\angle BCA$  intersecta  $\Omega$  em dois pontos distintos  $P$  e  $Q$ .

Prove que  $\angle ABP = \angle QBC$ .

**Problema 6.**

(a) Prove que para todo número real  $t$  tal que  $0 < t < \frac{1}{2}$  existe um inteiro positivo  $n$  com a seguinte propriedade: para todo conjunto  $S$  de  $n$  inteiros positivos existem dois elementos diferentes  $x$  e  $y$  de  $S$ , e um inteiro *não negativo*  $m$  (i.e.  $m \geq 0$ ), tal que

$$|x - my| \leq ty.$$

(b) Determine se para todo número real  $t$  tal que  $0 < t < \frac{1}{2}$  existe um conjunto infinito  $S$  de inteiros positivos tal que

$$|x - my| > ty$$

pra todo par de elementos distintos  $x$  e  $y$  de  $S$  e pra todo inteiro *positivo*  $m$  (i.e.  $m > 0$ ).