



EGMO 2018  
Florence | April 9<sup>th</sup>-15<sup>th</sup>

Language: Norwegian

Day: 2

Torsdag 12. april 2018

**Oppgave 4.** En *dominobrikke* er en brikke på  $1 \times 2$  eller  $2 \times 1$  ruter.

La  $n \geq 3$  være et heltall. Dominobrikker plasseres på et  $n \times n$  brett på en slik måte at hver dominobrikke dekker nøyaktig to ruter, og ingen brikker overlapper.

*Verdien* til en rad eller kolonne er antallet dominobrikker som dekker minst en rute i denne raden eller kolonnen. En konfigurasjon kalles *balansert* dersom det finnes en  $k \geq 1$  slik at hver rad og hver kolonne har verdi lik  $k$ .

Vis at det for hver  $n \geq 3$  finnes en balansert konfigurasjon, og finn det minste antallet dominobrikker som trengs for å lage en slik konfigurasjon.

**Oppgave 5.** La  $\Gamma$  være omsirkelen til trekanten  $ABC$ . En sirkel  $\Omega$  tangerer linjestykket  $AB$  og tangerer sirkelen  $\Gamma$  i et punkt på samme side av linjen  $AB$  som  $C$ . Vinkelhalveringslinjen til  $\angle BCA$  skjærer  $\Omega$  i to ulike punkter  $P$  og  $Q$ .

Vis at  $\angle ABP = \angle QBC$ .

**Oppgave 6.**

(a) Vis at for alle reelle tall  $t$  med  $0 < t < \frac{1}{2}$ , så eksisterer det et positivt heltall  $n$  med følgende egenskap: for hver mengde  $S$  av  $n$  positive heltall så finnes det to ulike elementer  $x$  og  $y$  i  $S$ , og et *ikke-negativt* heltall  $m$  (dvs.  $m \geq 0$ ), slik at

$$|x - my| \leq ty.$$

(b) Bestem om det for hvert reelle tall  $t$ , med  $0 < t < \frac{1}{2}$ , finnes en uendelig mengde  $S$  av positive heltall slik at

$$|x - my| > ty$$

for alle par av ulike elementer  $x$  og  $y$  i  $S$  og alle *positive* heltall  $m$  (dvs.  $m > 0$ ).