



EGMO 2018  
Florence | April 9<sup>th</sup>-15<sup>th</sup>

Language: Lithuanian

Day: 2

2018 m. balandžio 12 d., ketvirtadienis

**4 uždavinys.** *Domino kauliuku* vadinsime  $2 \times 1$  arba  $1 \times 2$  plytelę.

Nagrinėkime natūraliųjų skaičių  $n \geq 3$ . Ant  $n \times n$  lentelės dedami domino kauliukai. Kiekvienas kauliukas turi dengti lygiai du lentelės langelius, jokie du kauliukai negali persidengti.

Lentelės eilutės arba stulpelio *vertė* yra kauliukų, dengiančių bent vieną tos eilutės arba stulpelio langelį, skaičius. Kauliukų išdėstymą lentelėje vadinsime *darniuoju*, jei egzistuoja toks skaičius  $k \geq 1$ , kad kiekvienos eilutės ir kiekvieno stulpelio vertė lygi  $k$ .

Įrodykite, kad kiekvienam  $n \geq 3$  egzistuoja darnusis kauliukų išdėstymas, ir kiekvienam  $n \geq 3$  nustatykite, kiek mažiausiai kauliukų gali būti darniajame išdėstyme panaudota.

**5 uždavinys.** Trikampio  $ABC$  apibrėžtinis apskritimas pažymėtas  $\Gamma$ . Apskritimas  $\Omega$  liečia kraštinę  $AB$ . Jis liečia ir apskritimą  $\Gamma$  taške, esančiame toje pačioje pusėje nuo tiesės  $AB$ , kaip taškas  $C$ . Kampo  $BCA$  pusiaukampinė kerta  $\Omega$  dviejuose skirtinguose taškuose  $P$  ir  $Q$ .

Įrodykite, kad  $\angle ABP = \angle QBC$ .

**6 uždavinys.**

(a) Įrodykite, kad kiekvienam realiajam  $t$ , tenkinančiam  $0 < t < \frac{1}{2}$ , egzistuoja natūralusis skaičius  $n$ , pasižymintis tokia savybe: kiekvienai aibei  $S$ , kurią sudaro  $n$  (skirtingų) natūraliųjų skaičių, egzistuoja tokie du skirtingi jos elementai  $x$  ir  $y$  bei toks *neneigiamas* sveikasis skaičius  $m$  (t. y.  $m \geq 0$ ), kad

$$|x - my| \leq ty.$$

(b) Nustatykite, ar kiekvienam realiajam  $t$ , tenkinančiam  $0 < t < \frac{1}{2}$ , egzistuoja tokia begalinė aibė  $S$ , sudaryta iš natūraliųjų skaičių, kad

$$|x - my| > ty$$

kiekvienai aibės  $S$  skirtingų elementų  $x$  ir  $y$  porai bei kiekvienam *teigiamam* sveikajam skaičiui  $m$  (t. y.  $m > 0$ ).