EGMO 2018

Florence | April 9th-15th

2018. Április 12., csütörtök

4. Feladat Az 1×2-es vagy 2×1-es téglalapot *dominó*nak hívjuk.

Legyen $n \geq 3$ pozitív egész. Egy $n \times n$-es táblára dominókat helyezünk le úgy, hogy minden dominó pontosan két mezőt foglaljon el, és a dominók között ne legyenek átfedőek.

Egy sor illetve oszlop *értéke* legyen azon dominók száma, melyek ennek a sornak illetve oszlopnak legalább egy mezőjét fedik. A dominók egy konfigurációját *kiegyensúlyozott*nak hívjuk, ha létezik olyan $k \geq 1$ egész, melyre minden sor és minden oszlop értéke k.

Igazoljuk, hogy minden $n \geq 3$ egész esetén létezik kiegyensúlyozott konfiguráció, továbbá határozzuk meg az ilyen kiegyensúlyozott konfigurációkban a dominók minimális számát!

5. Feladat Jelölje Γ az ABC háromszög köréírt körét. Legyen Ω olyan kör, amely érinti az AB szakaszt, és érinti Γ-t is úgy, hogy az érintési pont és C az AB egyenes ugyanazon oldalára esik. A $BCA\sphericalangle$ szögfelezője Ω-t P és Q különböző pontokban metszi.

Igazoljuk, hogy $ABP\sphericalangle = QBC\sphericalangle$.

6. Feladat

(a) Igazoljuk, hogy minden valós $0 < t < \frac{1}{2}$ szám esetén létezik olyan pozitív egész n szám, melyre teljesül a következő: bármely n-elemű, pozitív egészekből álló S halmazban léteznek x és y különböző S-beli elemek illetve egy olyan m *nem-negatív egész* szám (vagyis $m \geq 0$), melyre

$$|x - my| \leq ty.$$

(b) Döntsük el, hogy létezik-e minden valós $0 < t < \frac{1}{2}$ szám esetén olyan pozitív egészekből álló végtelen S halmaz, melyre

$$|x - my| > ty$$

teljesül minden különböző x, y S-beli számra és minden *pozitív egész* m számra (vagyis $m > 0$).

Megoldási idő: 4 óra 30 perc.
Minden feladat 7 pontot ér.