



ΕΓΜΘ 2018  
Florence | April 9<sup>th</sup>-15<sup>th</sup>

Language: Greek

Day: 2

Πέμπτη, 12 Απριλίου, 2018

**Πρόβλημα 4.** Ένα ντόμινο είναι ένα  $2 \times 1$  ή  $1 \times 2$  πλακάκι.

Έστω ακέραιος  $n \geq 3$ . Σε έναν  $n \times n$  πίνακα τοποθετούμε ντόμινο με τέτοιο τρόπο ώστε καθένα από αυτά να καλύπτει ακριβώς δύο κελιά του πίνακα και τα ντόμινο μεταξύ τους να μην αλληλοκαλύπτονται.

Ορίζουμε ως *τιμή* μιας γραμμής ή στήλης το πλήθος των ντόμινο που καλύπτουν τουλάχιστον ένα κελί αυτής της γραμμής ή της στήλης. Ονομάζουμε την τοποθέτηση των ντόμινο *ισορροπημένη* εάν υπάρχει κάποιος  $k \geq 1$  τέτοιος ώστε η τιμή κάθε γραμμής και κάθε στήλης να είναι  $k$ .

Αποδείξτε πως για κάθε  $n \geq 3$  υπάρχει κάποια ισορροπημένη τοποθέτηση και βρείτε τον ελάχιστο αριθμό των ντόμινο που απαιτείται για μια τέτοια τοποθέτηση.

**Πρόβλημα 5.** Έστω  $\Gamma$  ο περιγεγραμμένος κύκλος ενός τριγώνου  $ABC$ . Ένας κύκλος  $\Omega$  εφάπτεται στο ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  και επίσης εφάπτεται στον κύκλο  $\Gamma$  σε ένα σημείο που βρίσκεται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία  $AB$  με το σημείο  $C$ . Η διχοτόμος της γωνίας  $\angle BCA$  τέμνει τον  $\Omega$  σε δύο διαφορετικά σημεία  $P$  και  $Q$ .

Αποδείξτε ότι  $\angle ABP = \angle QBC$ .

**Πρόβλημα 6.**

(α) Αποδείξτε πως για κάθε πραγματικό αριθμό  $t$  τέτοιο ώστε  $0 < t < \frac{1}{2}$ , υπάρχει ένας θετικός ακέραιος  $n$  με την ακόλουθη ιδιότητα: για κάθε σύνολο  $S$  που αποτελείται από  $n$  θετικούς ακεραίους, υπάρχουν δύο διαφορετικά στοιχεία  $x, y$  του  $S$  και ένας μη αρνητικός ακέραιος  $m$  (δηλαδή  $m \geq 0$ ), ώστε

$$|x - my| \leq ty.$$

(β) Εξετάστε εάν για κάθε πραγματικό αριθμό  $t$  τέτοιο ώστε  $0 < t < \frac{1}{2}$ , υπάρχει ένα άπειρο σύνολο  $S$  θετικών ακεραίων ώστε

$$|x - my| > ty$$

για κάθε ζευγάρι διαφορετικών στοιχείων  $x, y$  του  $S$  και για κάθε θετικό ακέραιο  $m$  (δηλαδή  $m > 0$ ).

Language: Greek

Διάρκεια: 4 ώρες και 30 λεπτά  
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 7 μονάδες