



Donnerstag, 12. April 2018

**Aufgabe 4.** Ein *Domino* ist ein  $1 \times 2$  oder  $2 \times 1$  Stein.

Sei  $n \geq 3$  eine natürliche Zahl. Dominos werden auf einem  $n \times n$  Brett so platziert, dass jeder Domino genau zwei Felder des Brettes überdeckt, und Dominos sich nicht überlappen.

Der *Wert* einer Zeile oder Spalte ist die Anzahl der Dominos, die mindestens ein Feld dieser Zeile oder Spalte überdecken. Eine Anordnung heißt (heißt) *ausbalanciert*, wenn ein  $k \geq 1$  existiert, sodass jede Zeile und jede Spalte den Wert  $k$  hat.

Zeige, dass für jedes  $n \geq 3$  eine ausbalancierte Anordnung existiert, und bestimme die kleinstmögliche Anzahl Dominos, die für eine solche Anordnung benötigt wird.

**Aufgabe 5.** Sei  $\Gamma$  der Umkreis des Dreiecks  $ABC$ . Ein Kreis  $\Omega$  berühre die Strecke  $AB$  und berühre  $\Gamma$  in einem Punkt, der auf derselben Seite der Geraden  $AB$  wie  $C$  liege. Die Winkelhalbierende (Winkelsymmetrale) von  $\angle BCA$  schneide  $\Omega$  in zwei verschiedenen Punkten  $P$  und  $Q$ .

Zeige, dass  $\angle ABP = \angle QBC$ .

**Aufgabe 6.**

(a) Zeige, dass für jede reelle Zahl  $t$  mit  $0 < t < \frac{1}{2}$  eine positive ganze Zahl  $n$  mit der folgenden Eigenschaft existiert: Für jede Menge  $S$  von  $n$  positiven ganzen Zahlen existieren zwei verschiedene Elemente  $x$  und  $y$  in  $S$ , und eine *nicht-negative* ganze Zahl  $m$  (d.h.  $m \geq 0$ ), sodass

$$|x - my| \leq ty.$$

(b) Bestimme, ob für jede reelle Zahl  $t$  mit  $0 < t < \frac{1}{2}$  eine unendliche Menge  $S$  von positiven ganzen Zahlen existiert, sodass

$$|x - my| > ty$$

für jedes Paar verschiedener Elemente  $x$  und  $y$  in  $S$  und jede *positive* ganze Zahl  $m$  (d.h.  $m > 0$ ) gilt.