



EGMO 2018  
Florence | April 9<sup>th</sup>-15<sup>th</sup>

Language: Finnish

Day: 2

Torstaina 12.4.2018

**Tehtävä 4.** *Domino* on  $1 \times 2$ - tai  $2 \times 1$ -laatta.

Olkoon  $n \geq 3$  kokonaisluku. Dominoita asetetaan  $n \times n$ -laudalle siten, että jokainen domino peittää täsmälleen kaksi laudan ruutua ja dominot eivät mene päällekkäin.

Rivin tai sarakkeen *arvo* on niiden dominoiden lukumäärä, jotka peittävät vähintään yhden kyseisen rivin tai sarakkeen ruuduista. Dominoiden asettelua kutsutaan *tasapainoiseksi*, jos on olemassa  $k \geq 1$  niin, että jokaisen rivin ja jokaisen sarakkeen arvo on  $k$ .

Osoita, että kaikilla  $n \geq 3$  on olemassa tasapainoinen asettelu ja määritä pienin mahdollinen määrä dominoita, joka tarvitaan sellaiseen asetteluun.

**Tehtävä 5.** Olkoon  $\Gamma$  kolmion  $ABC$  ympäri piirretty ympyrä. Ympyrä  $\Omega$  sivuaa janaa  $AB$  ja lisäksi se sivuaa ympyrää  $\Gamma$  pisteessä, joka on janan  $AB$  samalla puolella kuin piste  $C$ . Kulman  $\angle BCA$  puolittaja leikkaa ympyrän  $\Omega$  kahdessa eri pisteessä  $P$  ja  $Q$ .

Osoita, että  $\angle ABP = \angle QBC$ .

**Tehtävä 6.**

(a) Osoita, että kaikilla reaaliluvuilla  $t$ , jotka toteuttavat ehdon  $0 < t < \frac{1}{2}$ , on olemassa positiivinen kokonaisluku  $n$ , jolla on seuraava ominaisuus: kun  $S$  on mikä tahansa  $n$  positiivisen kokonaisluvun joukko, niin on olemassa kaksi keskenään eri suurta alkioita  $x$  ja  $y$ , jotka kuuluvat joukkoon  $S$  ja lisäksi on olemassa *epänegatiivinen* kokonaisluku  $m$  (eli  $m \geq 0$ ), joilla

$$|x - my| \leq ty.$$

(b) Onko kaikilla ehdon  $0 < t < \frac{1}{2}$  toteuttavilla reaaliluvuilla  $t$  olemassa ääretön positiivisten kokonaislukujen joukko  $S$ , jolla ehto

$$|x - my| > ty$$

toteutuu kaikilla joukon  $S$  eri alkioista  $x$  ja  $y$  muodostuvilla pareilla ja kaikilla *positiivisilla* kokonaisluvuilla  $m$  (eli  $m > 0$ )?