



EGMO 2018  
Florence | April 9<sup>th</sup>-15<sup>th</sup>

Language: Dutch

Day: 2

Donderdag 12 april 2018

**Opgave 4.** Een *domino* is een  $1 \times 2$ - of  $2 \times 1$ -tegel.

Zij  $n \geq 3$  een geheel getal. Er worden domino's op een  $n \times n$ -bord gelegd zodat elke domino precies twee vakjes van het bord bedekt en de domino's niet overlappen.

De *waarde* van een rij of kolom is het aantal domino's dat minstens één vakje in die rij of kolom bedekt. Het  $n \times n$ -bord met domino's heet *gebalanceerd* als er een  $k \geq 1$  bestaat zodat elke rij en elke kolom waarde  $k$  heeft.

Bewijs dat er voor elke  $n \geq 3$  een gebalanceerd  $n \times n$ -bord met domino's bestaat, en bepaal het minimale aantal domino's dat nodig is voor zo'n gebalanceerd  $n \times n$ -bord.

**Opgave 5.** Zij  $\Gamma$  de omgeschreven cirkel van driehoek  $ABC$ . Een cirkel  $\Omega$  raakt aan lijnstuk  $AB$  en raakt verder aan  $\Gamma$  in een punt dat aan dezelfde kant van lijn  $AB$  ligt als  $C$ . De bissectrice van  $\angle BCA$  snijdt  $\Omega$  in twee verschillende punten  $P$  en  $Q$ .

Bewijs dat  $\angle ABP = \angle QBC$ .

**Opgave 6.**

(a) Bewijs dat voor elk reëel getal  $t$  met  $0 < t < \frac{1}{2}$  er een positief geheel getal  $n$  bestaat met de volgende eigenschap: voor elke verzameling  $S$  van  $n$  positieve gehele getallen bestaan er twee verschillende elementen  $x$  en  $y$  van  $S$  en een *niet-negatief* geheel getal  $m$  (d.w.z.  $m \geq 0$ ) zodat

$$|x - my| \leq ty.$$

(b) Bepaal of er voor elk reëel getal  $t$  met  $0 < t < \frac{1}{2}$  een oneindige verzameling  $S$  van positieve gehele getallen bestaat zodat

$$|x - my| > ty$$

voor elke twee verschillende elementen  $x$  en  $y$  van  $S$  en elk *positief* geheel getal  $m$  (d.w.z.  $m > 0$ ).