



EGMO 2018  
Florence | April 9<sup>th</sup>-15<sup>th</sup>

Language: Czech

Day: 2

Čtvrtek, duben 12, 2018

**Úloha 4.** *Domino* je kostka  $1 \times 2$  nebo  $2 \times 1$ .

Nechť  $n \geq 3$  je přirozené číslo. Kostky domina se umísťují na desku s  $n \times n$  políčky takovým způsobem, že každé domino pokrývá přesně dvě políčka na desce a žádná dvě domina se ani částečně nepřekrývají.

*Hodnota* řady nebo sloupce na desce je počet kostek domina, které pokrývají aspoň jedno políčko této řady nebo tohoto sloupce. Konfigurace kostek domin se nazývá *vybalancovaná*, právě když existuje nějaké přirozené číslo  $k \geq 1$  takové, že každá řada a každý sloupec má hodnotu  $k$ .

Dokažte, že vybalancovaná konfigurace existuje pro každé  $n \geq 3$ , a najděte minimální počet kostek domina potřebných pro takovou konfiguraci.

**Úloha 5.** Nechť  $\Gamma$  je kružnice opsaná trojúhelníku  $ABC$ . Kružnice  $\Omega$  se dotýká úsečky  $AB$  a kružnice  $\Gamma$  v bodě ležícím ve stejné polorovině ohraničené přímkou  $AB$ , jako leží bod  $C$ . Osa úhlu  $\angle BCA$  protíná kružnici  $\Omega$  ve dvou různých bodech  $P$  and  $Q$ .

Dokažte, že  $|\angle ABP| = |\angle QBC|$ .

**Úloha 6.**

(a) Dokažte, že pro každé reálné číslo  $t$ ,  $0 < t < \frac{1}{2}$ , existuje kladné celé číslo  $n$  s následující vlastností: Pro každou množinu  $S$  sestávající z  $n$  kladných celých čísel existují dva různé prvky  $x$  a  $y$  množiny  $S$  a nezáporné celé číslo  $m$  (tj.  $m \geq 0$ ) takové, že

$$|x - my| \leq ty.$$

(b) Určete, zda pro každé reálné číslo  $t$ ,  $0 < t < \frac{1}{2}$ , existuje nekonečná množina  $S$  kladných přirozených čísel taková, že

$$|x - my| > ty$$

pro každou dvojici různých prvků  $x$  a  $y$  množiny  $S$  a každé kladné celé číslo  $m$  (tj.  $m > 0$ ).