Четвъртък, 12 Април, 2018

Задача 4. Домино е плочка с размери 1×2 или 2×1.

Нека $n \geq 3$ е цяло число. Наредени са няколко домина на дъска $n \times n$, така че всяко домино да покрива точно две клетки на дъската и никои две домина да не се застъпват.

"Стойността" на даден ред или стълб е броят домина, които покриват поне една клетка от този ред или стълб. Наредбата на домина се нарича балансирана ако съществува някое $k \geq 1$, такова че всеки ред и стълб да има "стойност"k.

Докажете, че за всяко $n \geq 3$ съществува балансирана наредба и намерете минималния брой домина, които са необходими за нея.

Задача 5. Нека Γ е описаната около триъгълник ABC окръжност. Окръжност Ω се допира до отсечката AB и също се допира до Γ в точка, лежаща в същата полуравнина спрямо правата AB като C. Ъглополовящата на $\angle BCA$ пресича Ω в две различни точки P и Q.

Докажете, че $\angle ABP = \angle QBC$.

Задача 6.

(а) Докажете, че за всяко реално число t, такова че $0 < t < \frac{1}{2}$, съществува положително цяло число n със следното свойство: за всяко множество S от n положителни цели числа съществуват два различни елемента x и y на S и неотрицателно цяло число m (т.е. $m \geq 0$), такива че
$$|x - my| \leq ty.$$

(б) Вярно ли е, че за всяко реално число t, такова че $0 < t < \frac{1}{2}$, съществува безкрайно множество S от положителни цели числа, такива че
$$|x - my| > ty$$
за всеки два различни елемента x и y на S и всяко положително цяло число m (т.е. $m > 0$).

Време за работа: 4 часа and 30 минути
Всяка задача е по 7 точки