Четвер, 12 квітня, 2018 р.

Задача 4. *Доміношками* назвемо прямокутники розміром 1×2 або 2×1.

Нехай $n \geq 3$ – деяке ціле число. Доміношки викладаються на дошку розміром $n \times n$ так, що кожна доміношка займає рівно дві сусідні клітинки дошки і доміношки не перекриваються.

Вагою рядка або стовпчика назвемо кількість доміношок, що займають принаймні одну клітинку у цьому рядку або стовпчику. Розташування доміношок на дошці назвемо *збалансованим* якщо існує таке $k \geq 1$, що кожний рядок та кожний стовпчик має вагу k.

Доведіть, що для кожного $n \geq 3$ існує збалансоване розташування і знайдіть найменшу кількість доміношок, що потрібна для такого розташування.

Задача 5. Нехай Γ – описане коло трикутника ABC. Деяке коло Ω дотикається до відрізку AB і дотикається до кола Γ в точці, що лежить по один бік з точкою C відносно AB. Бісектриса кута $\angle BCA$ перетинає коло Ω у двох різних точках P і Q.

Доведіть, що $\angle ABP = \angle QBC$.

Задача 6.

(a) Доведіть, що для кожного дійсного числа t такого, що $0 < t < \frac{1}{2}$, існує натуральне число n з такою властивістю: для довільної множини S, що складається з n натуральних чисел, знайдуться два різні елементи x та y з S і *невід'ємне* ціле m (тобто $m \geq 0$), такі що

$$|x - my| \leq ty.$$

(b) Чи правда, що для кожного дійсного числа t такого, що $0 < t < \frac{1}{2}$, існує нескінченна множина S натуральних чисел така, що

$$|x - my| > ty$$

для кожної пари різних елементів x та y з S і довільного *додатного* числа m (тобто $m > 0$).

Час: 4 години 30 хвилин

Кожна задача оцінюється в 7 балів