Jueves 12 de abril de 2018

Problema 4. Un *dominó* es una ficha de 1×2 o de 2×1 cuadrados unitarios.

Sea $n \geq 3$ un entero. Se ponen dominós en un tablero de $n \times n$ casillas de tal manera que cada dominó cubre exactamente dos casillas del tablero sin superponerse (en otras palabras, sin traslaparse).

El *valor* de una fila o columna es el número de dominós que cubren al menos una casilla de esta fila o columna. Una configuración de dominós se llama *balanceada* si existe algún entero $k \geq 1$ tal que cada fila y cada columna tiene valor k.

Demuestre que existe una configuración balanceada para cada $n \geq 3$, y encuentre el mínimo número de dominós necesarios para una tal configuración.

Problema 5. Sea Γ la circunferencia que pasa por los vértices de un triángulo ABC. Una circunferencia Ω es tangente al segmento AB y tangente a Γ en un punto situado al mismo lado de la recta AB que C. La bisectriz del ángulo $\angle BCA$ interseca a Ω en dos puntos distintos P y Q.

Demuestre que $\angle ABP = \angle QBC$.

Problema 6.

(a) Demuestre que para todo número real t tal que $0 < t < \frac{1}{2}$ existe un entero positivo n con la siguiente propriedad: para todo conjunto S de n enteros positivos existen dos elementos distintos x e y de S, y un entero *no negativo* m (es decir, $m \geq 0$), tal que

$$|x - my| \leq ty.$$

(b) Determine si para todo número real t con $0 < t < \frac{1}{2}$ existe un conjunto infinito S de enteros positivos tal que

$$|x - my| > ty$$

para todo par de elementos distintos x e y de S y para todo entero *positivo* m (es decir, $m > 0$).

Tiempo: 4 horas y 30 minutos
Cada problema vale 7 puntos