Language: **Slovenian**

Day: **2**

Četrtek, 12. april 2018

Naloga 4. *Domina* je ploščica velikosti 1×2 ali 2×1.

Naj bo $n \geq 3$ celo število. Domine položimo na $n \times n$ ploščo na tak način, da vsaka domina prekriva natanko dve polji plošče, in da se domine med seboj ne prekrivajo.

Vrednost vrstice ali stolpca je število domin, ki prekrivajo vsaj eno polje te vrstice oz. stolpca. Konfiguraciji pravimo, da je *uravnotežena*, če obstaja nek $k \geq 1$, tako da ima vsaka vrstica in vsak stolpec vrednost k.

Dokaži, da za vsak $n \geq 3$ obstaja uravnotežena konfiguracija in poišči minimalno število domin, ki jih potrebuješ za takšno konfiguracijo.

Naloga 5. Naj bo Γ trikotniku ABC očrtana krožnica. Krožnica Ω je tangentna na daljico AB in je tangentna na Γ v točki, ki leži na isti strani premice AB kot C. Razpolovišče kota $\angle BCA$ seka Ω v dveh različnih točkah P in Q.

Dokaži, da je $\angle ABP = \angle QBC$.

Naloga 6.

(a) Dokaži, da za vsako realno število t, za katero je $0 < t < \frac{1}{2}$, obstajaja naravno število n s sledečo lastnostjo: za vsako množico S, ki jo tvori n naravnih števil, obstajata dva različna elementa x in y iz S, in *nenegativno* celo število m (tj., $m \geq 0$), tako da velja

$$|x - my| \leq ty.$$

(b) Določi, ali za vsako realno število t, za katero je $0 < t < \frac{1}{2}$, obstaja neskončna množica S naravnih števil, tako da velja

$$|x - my| > ty$$

za vsak par različnih elementov x in y iz S in vsako naravno število m.

Čas reševanja: 4 ure in 30 minut
Vsaka naloga je vredna 7 točk