četvrtak, 12.4.2018.

Zadatak 4. *Domina* je pločica dimenzija 1×2 ili 2×1.

Neka je $n \geq 3$ prirodan broj. Domine su postavljene na tablu dimenzija $n \times n$ tako da svaka domina pokriva tačno dva polja table, i domine se ne preklapaju.

Vrednost vrste, odnosno kolone, je broj domina koje pokrivaju bar jedno polje u toj vrsti, odnosno koloni. Konfiguraciju nazivamo *balansiranom* ako postoji $k \geq 1$ tako da svaka vrsta i svaka kolona ima vrednost k.

Dokazati da balansirana konfiguracija postoji za svako $n \geq 3$, i naći najmanji broj domina potrebnih za takvu konfiguraciju.

Zadatak 5. Neka je Γ kružnica opisana oko trougla ABC. Kružnica Ω tangira duž AB i tangira kružnicu Γ u tački koja je sa iste strane prave AB kao i C. Simetrala ugla $\angle BCA$ seče Ω u dve različite tačke P i Q.

Dokazati $\angle ABP = \angle QBC$.

Zadatak 6.

(a) Dokazati da za svaki realan broj t za koji važi $0 < t < \frac{1}{2}$ postoji prirodan broj n koji zadovoljava sledeće: Za svaki skup S koji sadrži n prirodnih brojeva postoje dva različita elementa x i y skupa S, i *nenegativan* ceo broj m (tj. $m \geq 0$), tako da

$$|x - my| \leq ty.$$

(b) Utvrditi da li za svaki realan broj t za koji važi $0 < t < \frac{1}{2}$ postoji beskonačan skup S koji sadrži prirodne brojeve tako da

$$|x - my| > ty$$

važi za svaki par različitih elemenata x i y skupa S i svaki *prirodan* broj m (tj. $m > 0$).

Vreme: 4 sata i 30 minuta

Svaki zadatak vredi 7 poena.