Четверг, 12 апреля 2018 г.

Задача 4. *Доминошка* — это плитка 1×2 или 2×1.

Пусть $n \geq 3$ — целое число. Доминошки размещаются на доске $n \times n$ так, что каждая доминошка закрывает ровно две клетки и доминошки не накладываются друг на друга.

Весом столбца или строки назовём количество доминошек, которые накрывают по крайней мере одну клетку этого столбца или этой строки. Размещение называется *сбаллансированным*, если найдётся число $k \geq 1$ такое, что каждый столбец и каждая строка имеют вес k.

Для каждого $n \geq 3$ докажите, что существует сбаллансированное размещение, и найдите наименьшее количество доминошек, которое необходимо для его получения.

Задача 5. Пусть Γ — описанная окружность треугольника ABC. Окружность Ω касается отрезка AB и касается окружности Γ в точке, расположенной по ту же сторону относительно прямой AB, что и точка C. Биссектриса угла $\angle BCA$ пересекает Ω в двух различных точках P и Q.

Докажите, что $\angle ABP = \angle QBC$.

Задача 6.

(a) Докажите, что для любого действительного числа t такого, что $0 < t < \frac{1}{2}$, существует положительное целое число n со следующим свойством: для любого множества S, состоящего из n положительных целых чисел, найдутся два различных элемента x и y из S и *неотрицательное* целое число m (т. е. $m \geq 0$) такие, что

$$|x - my| \leq ty.$$

(b) Верно ли, что для каждого действительного числа t такого, что $0 < t < \frac{1}{2}$, существует бесконечное множество S, состоящее из положительных целых чисел, такое, что

$$|x - my| > ty$$

для любой пары различных элементов x и y из S и любого *положительного* целого числа m (т. е. $m > 0$).

Время работы: 4 часа 30 минут
Каждая задача оценивается в 7 баллов