Joi, 12 aprilie, 2018

Problema 4. Un *domino* este o piesă dreptunghiulară de dimensiuni 1×2 sau 2×1.

Fie $n \geq 3$ un număr întreg. Pe o tablă $n \times n$ se aşează câteva dominouri, astfel încât fiecare domino acoperă exact două pătrăţele ale tablei, iar dominourile nu se suprapun.

Valoarea unei linii sau a unei coloane este numărul dominourilor care acoperă cel puţin un pătrăţel al acelei linii sau coloane. Configuraţia se numeşte *echilibrată* dacă există un număr $k \geq 1$ astfel încât fiecare linie şi fiecare coloană are valoarea k.

Demonstraţi că pentru fiecare $n \geq 3$ există o configuraţie echilibrată şi determinaţi numărul minim de dominouri necesare într-o astfel de configuraţie.

Problema 5. Fie Γ cercul circumscris triunghiului ABC. Un cerc Ω este tangent segmentului AB şi este tangent la Γ într-un punct situat de aceeaşi parte a dreptei AB ca şi C. Bisectoarea unghiului $\angle BCA$ intersectează Ω în două puncte diferite P şi Q.

Demonstraţi că $\angle ABP = \angle QBC$.

Problema 6.

(a) Demonstraţi că pentru orice număr real t, cu $0 < t < \frac{1}{2}$, există un număr întreg strict pozitiv n cu următoarea proprietate: pentru orice mulţime S formată din n numere întregi strict pozitive există două elemente diferite x şi y ale lui S şi un număr întreg *nenegativ* m (i.e. $m \geq 0$), astfel încât

$$|x - my| \leq ty.$$

(b) Decideţi dacă pentru orice număr real t, cu $0 < t < \frac{1}{2}$, există o mulţime infinită S de numere întregi strict pozitive astfel încât

$$|x - my| > ty,$$

oricare ar fi perechea de elemente diferite x şi y ale lui S şi oricare ar fi numărul întreg *strict pozitiv* m (i.e. $m > 0$).

Timp: 4 ore şi 30 de minute
Fiecare problemă valorează 7 puncte