Quinta-feira, 12 de abril de 2018

Problema 4. Um *dominó* é uma peça de tamanho 1×2 ou 2×1.

Seja $n \geq 3$ um inteiro. Dominós são colocados em um tabuleiro quadriculado $n \times n$ de maneira que cada dominó cobre exatamente 2 casas do tabuleiro e os dominós não se sobrepõem.

O *valor* de uma linha ou coluna do tabuleiro é o número de dominós que cobre pelo menos uma casa dessa linha ou coluna. Uma configuração de dominós no tabuleiro é chamada *balanceada* se existe algum $k \geq 1$ tal que cada linha e cada coluna tem valor k.

Prove que uma configuração balanceada existe para todo $n \geq 3$, e encontre o menor número de dominós necessários para tal configuração.

Problema 5. Seja Γ o circuncírculo do triângulo ABC. A circunferência Ω é tangente ao segmento AB e é tangente a Γ em um ponto que fica no mesmo lado da reta AB que o ponto C. A bissetriz de $\angle BCA$ intersecta Ω em dois pontos distintos P e Q.

Prove que $\angle ABP = \angle QBC$.

Problema 6.

(a) Prove que para todo número real t tal que $0 < t < \frac{1}{2}$ existe um inteiro positivo n com a seguinte propriedade: para todo conjunto S de n inteiros positivos existem dois elementos diferentes x e y de S, e um inteiro *não negativo* m (i.e. $m \geq 0$), tal que

$$|x - my| \leq ty.$$

(b) Determine se para todo número real t tal que $0 < t < \frac{1}{2}$ existe um conjunto infinito S de inteiros positivos tal que

$$|x - my| > ty$$

pra todo par de elementos distintos x e y de S e pra todo inteiro *positivo* m (i.e. $m > 0$).

Tempo: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos