Language: **Polish**

Day: **2**

Czwartek, 12 kwietnia 2018 r.

Zadanie 4. *Płytką domino* nazywamy płytkę o wymiarach 1×2 lub 2×1.

Niech $n \geqslant 3$ będzie liczbą całkowitą. Płytki domina ustawiamy na planszy o wymiarach $n \times n$ w taki sposób, że każda z płytek przykrywa dokładnie dwa pola planszy oraz żadne dwie płytki nie przykrywają tego samego pola.

Wartością wiersza lub kolumny nazwiemy liczbę płytek domino, które przykrywają co najmniej jedno pole tego wiersza lub kolumny. Ustawienie płytek domino nazywamy *zbalansowanym* jeśli istnieje taka liczba całkowita $k \geqslant 1$, że wszystkie wiersze i kolumny mają wartość k.

Dowieść, że dla każdego $n \geqslant 3$ istnieje zbalansowane ustawienie płytek domino oraz znaleźć najmniejszą możliwą liczbę płytek w takim ustawieniu.

Zadanie 5. Niech Γ będzie okręgiem opisanym na trójkącie ABC. Okrąg Ω jest styczny do odcinka AB, a ponadto jest styczny do Γ w punkcie leżącym po tej samej stronie prostej AB co C. Dwusieczna kąta $\angle BCA$ przecina Ω w dwóch różnych punktach P i Q.

Udowodnić, że $\angle ABP = \angle QBC$.

Zadanie 6.

(a) Wykazać, że dla każdej liczby rzeczywistej t, takiej że $0 < t < \frac{1}{2}$, istnieje dodatnia liczba całkowita n o następującej własności: dla każdego zbioru S złożonego z n dodatnich liczb całkowitych istnieją takie dwa różne elementy x i y zbioru S oraz taka *nieujemna* liczba całkowita (tj. $m \geqslant 0$), że

$$|x - my| \leqslant ty.$$

(b) Rozstrzygnąć, czy dla każdej liczby rzeczywistej t, takiej że $0 < t < \frac{1}{2}$, istnieje taki nieskończony zbiór S dodatnich liczb całkowitych, że

$$|x - my| > ty$$

dla każdych dwóch różnych elementów x i y zbioru S oraz każdej *dodatniej* liczby całkowitej m (tj. $m > 0$).

Czas pracy: 4 godziny i 30 minut
Za każde zadanie można otrzymać 7 punktów.