Torsdag 12. april 2018

Oppgave 4. En *dominobrikke* er en brikke på 1×2 eller 2×1 ruter.

La $n \geq 3$ være et heltall. Dominobrikker plasseres på et $n \times n$ brett på en slik måte at hver dominobrikke dekker nøyaktig to ruter, og ingen brikker overlapper.

Verdien til en rad eller kolonne er antallet dominobrikker som dekker minst en rute i denne raden eller kolonnen. En konfigurasjon kalles *balansert* dersom det finnes en $k \geq 1$ slik at hver rad og hver kolonne har verdi lik k.

Vis at det for hver $n \geq 3$ finnes en balansert konfigurasjon, og finn det minste antallet dominobrikker som trengs for å lage en slik konfigurasjon.

Oppgave 5. La Γ være omsirkelen til trekanten ABC. En sirkel Ω tangerer linjestykket AB og tangerer sirkelen Γ i et punkt på samme side av linjen AB som C. Vinkelhalveringslinjen til $\angle BCA$ skjærer Ω i to ulike punkter P og Q.

Vis at $\angle ABP = \angle QBC$.

Oppgave 6.

(a) Vis at for alle reelle tall t med $0 < t < \frac{1}{2}$, så eksisterer det et positivt heltall n med følgende egenskap: for hver mengde S av n positive heltall så finnes det to ulike elementer x og y i S, og et *ikke-negativt* heltall m (dvs. $m \geq 0$), slik at

$$|x - my| \leq ty.$$

(b) Bestem om det for hvert reelle tall t, med $0 < t < \frac{1}{2}$, finnes en uendelig mengde S av positive heltall slik at

$$|x - my| > ty$$

for alle par av ulike elementer x og y i S og alle *positive* heltall m (dvs. $m > 0$).

Tid til rådighet: 4 timer og 30 minutter
Hver oppgave er verdt 7 poeng