Language: **Macedonian**

Day: **2**

Четврток, 12 април 2018 година

Проблем 4. *Домино* е плочка со димензии 1×2 и 2×1.

Нека $n\geq 3$ е цел број. Домина се поставени на табла со димензии $n\times n$, така што секое домино прекрива точно две полиња на таблата и домината не се преклопуваат.

Вредност на редица или колона е бројот на домина што покриваат барем едно поле во оваа редица или колона. Конфигурацијата на домина на таблата се нарекува *балансирана*, ако постои некој број $k\geq 1$, таков што секоја редица и секоја колона има вредност k.

Докажи дека постои балансирана конфигурација за секој $n\geq 3$ и најди го најмалиот број на домина што е потребен за ваквата конфигурација.

Проблем 5. Нека Γ е опишаната кружница на триаголникот ABC. Кружницата Ω ја допира отсечката AB и истовремено ја допира кружницата Γ во точка што се наоѓа на истата страна на правата AB како точката C. Симетралата на аголот $\measuredangle BCA$ ја сече кружницата Ω во две различни точки P и Q.

Докажи дека $\measuredangle ABP = \measuredangle QBC$.

Проблем 6.

а) Докажи дека за секој реален број t, таков што $0 < t < \frac{1}{2}$, постои позитивен цел број n со следнава особина: за секое множество S од n позитивни цели броеви постојат два различни елементи x и y од S и ненегативен цел број m (т.е. $m\geq 0$), така што да важи

$$|x-my|\leq ty.$$

б) Утврди дали за секој реален број t, таков што $0 < t < \frac{1}{2}$, постои бесконечно множество S од позитивни цели броеви такви што да важи

$$|x-my| > ty$$

за секој пар од различни елементи x и y од S и за секој позитивен цел број m (т.е. $m > 0$).

Language: Macedonian - Македонски

Време за работа: 4 часа и 30 минути.
Секој проблем се вреднува со 7 поени.