

2018 m. balandžio 12 d., ketvirtadienis

4 uždavinys. *Domino kauliuku* vadinsime 2×1 arba 1×2 plytelę.

Nagrinėkime natūraliųjų skaičių $n \geq 3$. Ant $n \times n$ lentelės dedami domino kauliukai. Kiekvienas kauliukas turi dengti lygiai du lentelės langelius, jokie du kauliukai negali persidengti.

Lentelės eilutės arba stulpelio *vertė* yra kauliukų, dengiančių bent vieną tos eilutės arba stulpelio langelį, skaičius. Kauliukų išdėstymą lentelėje vadinsime *darniuoju*, jei egzistuoja toks skaičius $k \geq 1$, kad kiekvienos eilutės ir kiekvieno stulpelio vertė lygi k .

Įrodykite, kad kiekvienam $n \geq 3$ egzistuoja darnusis kauliukų išdėstymas, ir kiekvienam $n \geq 3$ nustatykite, kiek mažiausiai kauliukų gali būti darniajame išdėstyme panaudota.

5 uždavinys. Trikampio ABC apibrėžtinis apskritimas pažymėtas Γ . Apskritimas Ω liečia kraštinę AB . Jis liečia ir apskritimą Γ taške, esančiame toje pačioje pusėje nuo tiesės AB , kaip taškas C . Kampe BCA pusiaukampinė kerta Ω dviejuose skirtinguose taškuose P ir Q .

Įrodykite, kad $\angle ABP = \angle QBC$.

6 uždavinys.

(a) Įrodykite, kad kiekvienam realiajam t , tenkinančiam $0 < t < \frac{1}{2}$, egzistuoja natūralusis skaičius n , pasižymintis tokia savybe: kiekvienai aibei S , kurią sudaro n (skirtingų) natūraliųjų skaičių, egzistuoja tokie du skirtingi jos elementai x ir y bei toks *neneigiamas* sveikasis skaičius m (t. y. $m \geq 0$), kad

$$|x - my| \leq ty.$$

(b) Nustatykite, ar kiekvienam realiajam t , tenkinančiam $0 < t < \frac{1}{2}$, egzistuoja tokia begalinė aibė S , sudaryta iš natūraliųjų skaičių, kad

$$|x - my| > ty$$

kiekvienai aibės S skirtingų elementų x ir y porai bei kiekvienam *teigiamam* sveikajam skaičiui m (t. y. $m > 0$).