Ceturtdien, 2018. gada 12. aprīlī.

4. uzdevums. *Domino* ir spēļu kauliņš ar izmēriem 1×2 vai 2×1 kvadrātveida lauciņš. Dots naturāls skaitlis $n \geq 3$. Domino kauliņi ir uzlikti uz $n \times n$ lauciņu galdiņa tā, ka katrs *domino* pārklāj precīzi divus galdiņa lauciņus, un *domino* nepārklāj viens otru.

Rindas vai kolonnas *vērtība* ir tādu domino kauliņu skaits, kuriem vismaz viens lauciņš pārklāj vismaz vienu šīs kolonnas vai rindas lauciņu. Konfigurāciju sauc par *sabalansētu*, ja eksistē tāds naturāls skaitlis $k \geq 1$, ka katrai rindai un katrai kolonnai ir vērtība k.

Pierādīt, ka katram $n \geq 3$ eksistē *sabalansēta* konfigurācija. Katram n noteikt minimālo domino kauliņu skaitu, kas nepieciešams *sabalansētai* konfigurācijai.

5. uzdevums. Trijstūrim ABC apvilkta riņķa līnija Γ. Riņķa līnija Ω pieskaras nogrieznim AB, kā arī pieskaras riņķa līnijai Γ punktā, kurš atrodas no taisnes AB vienā pusē ar punktu C. Leņķa $\angle BCA$ bisektrise krusto riņķa līnju Ω divos dažādos punktos P un Q. Pierādīt, ka $\angle ABP = \angle QBC$.

6. uzdevums.

(a) Pierādīt, ka katram reālam skaitlim t, tādam, ka $0 < t < \frac{1}{2}$, var atrast naturālu skaitli n, kuram izpildās sekojošs nosacījums:

Katrā n naturālu skaitļu kopā S var atrast divus dažādus kopas S elementus x un y, un eksistē *nenegatīvs* vesels skaitlis m (t.i. $m \geq 0$), tāds, ka

$$|x - my| \leq ty.$$

(b) Noskaidrot, vai katram reālam skaitlim t tādam, ka $0 < t < \frac{1}{2}$, eksistē bezgalīga naturālu skaitļu kopa S, kurai katram dažādu kopas S elementu pārim x un y un katram *naturālam* skaitlim m (t.i. $m > 0$), izpildās nevienādība

$$|x - my| > ty.$$

Risināšanas laiks: $4\frac{1}{2}$ stundas.
Katru uzdevumu vērtē ar 7 punktiem.