Language: **Japanese**

Day: **2**

2018 年 4 月 12 日 木曜日

問題 4. 1×2 または 2×1 のタイルを**ドミノ**とよぶ.

n を 3 以上の整数とする. $n \times n$ のマス目にそれぞれのドミノがちょうど 2 つのマスを覆い, 互いに重ならないようにドミノを配置する.

それぞれの行および列に対してその**価値**を, その行や列のマスを少なくとも 1 つ覆っているドミノの個数とする. ある正の整数 k が存在して, どの行および列の価値も k であるとき, この配置は**均等**であるという.

任意の n について均等な配置が存在することを示し, 均等な配置で用いられるドミノの個数としてありうる最小の値を求めよ.

問題 5. Γ を三角形 ABC の外接円とする. 円 Ω は辺 AB に接しており, 直線 AB に関して C と同じ側にある点で Γ に接している. $\angle BCA$ の二等分線が Ω と異なる 2 点 P, Q で交わっているとする.

このとき, $\angle ABP = \angle QBC$ であることを示せ.

問題 6.

(a) $0 < t < \frac{1}{2}$ をみたす任意の実数 t について, 以下の条件をみたすような正の整数 n が存在することを示せ：n 個の正の整数からなる任意の集合 S について, S の異なる 2 つの元 x, y と**非負**整数 m (すなわち $m \geqq 0$) が存在して,

$$|x - my| \leqq ty$$

となる.

(b) $0 < t < \frac{1}{2}$ をみたす各実数 t について, 無限個の正の整数からなる集合 S であって, S の任意の異なる元 x, y および任意の**正の**整数 m (すなわち $m > 0$) が

$$|x - my| > ty$$

をみたすようなものが存在するかを決定せよ.

試験時間：4 時間 30 分
各問 7 点