Giovedì 12 aprile 2018

Problema 4. Una *tessera del domino* è una tessera 1×2 o 2×1.

Sia $n \geq 3$ un intero. Delle tessere del domino vengono messe su una tabella $n \times n$ in modo che ogni tessera copra esattamente due caselle della tabella e le tessere non si sovrappongano.

Il *valore* di una riga o colonna è il numero di tessere del domino che coprono almeno una casella di quella riga o colonna. La configurazione è detta *bilanciata* se esiste un intero $k \geq 1$ tale che ogni riga e ogni colonna ha valore k.

Dimostrare che per ogni $n \geq 3$ esiste una configurazione bilanciata, e trovare il minimo numero di tessere del domino necessarie per una tale configurazione.

Problema 5. Sia Γ la circonferenza circoscritta al triangolo ABC. Una circonferenza Ω è tangente al segmento AB ed è tangente a Γ in un punto che sta dalla stessa parte di C rispetto alla retta AB. La bisettrice dell'angolo $\angle BCA$ interseca Ω in due punti distinti P e Q.

Dimostrare che $\angle ABP = \angle QBC$.

Problema 6.

(a) Dimostrare che per ogni numero reale t tale che $0 < t < \frac{1}{2}$ esiste un intero positivo n con la seguente proprietà: per ogni insieme S di n interi positivi esistono due elementi distinti x e y in S, e un intero *non-negativo* m (cioè $m \geq 0$), tali che

$$|x - my| \leq ty.$$

(b) Determinare se per ogni numero reale t tale che $0 < t < \frac{1}{2}$ esiste un insieme infinito S di interi positivi tali che

$$|x - my| > ty$$

per ogni coppia di elementi distinti x e y di S e per ogni intero *positivo* m (cioè $m > 0$).

Tempo a disposizione: 4 ore e 30 minuti
Ogni problema vale 7 punti