

יום חמישי, 12 באפריל, 2018

שאלה 4. אבן דומינן הינה אריח מלבני בגודל 1×2 או 2×1 . יהא $n \geq 3$ שלם. אבני דומינו מונחות על לוח משבצות בגודל $n \times n$ בצורה כזו שכל אבן מכסה בדיוק שתי משבצות, והאבנים לא עולות אחת על השנייה. הערך של שורה או עמודה הוא מספר אבני הדומינו אשר מכסות לפחות משבצת אחת בשורה או עמודה זו. הקונפיגורציה נקראת מאוזנת אם קיים $k \geq 1$ כלשהו עבורו הערכים של כל השורות ושל כל העמודות שווים ל- k . הוכיחי כי קיימת קונפיגורציה מאוזנת לכל $n \geq 3$, ומצאי את כמות אבני הדומינו המינימלית הדרושה לקונפיגורציה כזו.

שאלה 5. יהא Γ המעגל החוסם של משולש ABC . מעגל Ω משיק לקטע AB , ומשיק ל- Γ בנקודה אשר נמצאת באותו הצד של הישר AB כמו הנקודה C . חוצה הזווית של $\sphericalangle BCA$ נחתך עם Ω בשתי נקודות שונות P ו- Q . הוכיחי כי $\sphericalangle ABP = \sphericalangle QBC$.

שאלה 6. (א) הוכיחי כי לכל מספר ממשי t עם $0 < t < \frac{1}{2}$ קיים שלם חיובי n עם התכונה הבאה: לכל קבוצה S של n שלמים חיוביים, קיימים ב- S שני איברים שונים x ו- y , וקיים שלם אי-שלילי m (כלומר, $m \geq 0$), עבורם

$$|x - my| \leq ty$$

(ב) קבעי האם לכל מספר ממשי t עם $0 < t < \frac{1}{2}$ קיימת קבוצה אינסופית S של שלמים חיוביים, עבורה מתקיים

$$|x - my| > ty$$

לכל זוג איברים שונים x ו- y מתוך S , ולכל שלם חיובי m (כלומר, $m > 0$).