Language: **Greek**

Day: **2**

Πέμπτη, 12 Απριλίου, 2018

Πρόβλημα 4. Ένα ντόμινο είναι ένα 2×1 ή 1×2 πλακάκι.

Έστω ακέραιος $n\geq 3$. Σε έναν $n\times n$ πίνακα τοποθετούμε ντόμινο με τέτοιο τρόπο ώστε καθένα από αυτά να καλύπτει ακριβώς δύο κελιά του πίνακα και τα ντόμινο μεταξύ τους να μην αλληλοκαλύπτονται.

Ορίζουμε ως *τιμή* μιας γραμμής ή στήλης το πλήθος των ντόμινο που καλύπτουν τουλάχιστον ένα κελί αυτής της γραμμής ή της στήλης. Ονομάζουμε την τοποθέτηση των ντόμινο *ισορροπημένη* εάν υπάρχει κάποιος $k\geq 1$ τέτοιος ώστε η τιμή κάθε γραμμής και κάθε στήλης να είναι k.

Αποδείξτε πως για κάθε $n\geq 3$ υπάρχει κάποια ισορροπημένη τοποθέτηση και βρείτε τον ελάχιστο αριθμό των ντόμινο που απαιτείται για μια τέτοια τοποθέτηση.

Πρόβλημα 5. Έστω Γ ο περιγγεγραμμένος κύκλος ενός τριγώνου ABC. Ένας κύκλος Ω εφάπτεται στο ευθύγραμμο τμήμα AB και επίσης εφάπτεται στον κύκλο Γ σε ένα σημείο που βρίσκεται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία AB με το σημείο C. Η διχοτόμος της γωνίας $\angle BCA$ τέμνει τον Ω σε δύο διαφορετικά σημεία P και Q.

Αποδείξτε ότι $\angle ABP = \angle QBC$.

Πρόβλημα 6.

(α) Αποδείξτε πως για κάθε πραγματικό αριθμό t τέτοιο ώστε $0 < t < \frac{1}{2}$, υπάρχει ένας θετικός ακέραιος n με την ακόλουθη ιδιότητα: για κάθε σύνολο S που αποτελείται από n θετικούς ακεραίους, υπάρχουν δύο διαφορετικά στοιχεία x, y του S και ένας μη αρνητικός ακέραιος m (δηλαδή $m\geq 0$), ώστε

$$|x-my|\leq ty.$$

(β) Εξετάστε εάν για κάθε πραγματικό αριθμό t τέτοιο ώστε $0 < t < \frac{1}{2}$, υπάρχει ένα άπειρο σύνολο S θετικών ακεραίων ώστε

$$|x-my| > ty$$

για κάθε ζευγάρι διαφορετικών στοιχείων x, y του S και για κάθε θετικό ακέραιο m (δηλαδή $m > 0$).

Language: Greek

Διάρκεια: 4 ώρες και 30 λεπτά

Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 7 μονάδες