Language: **German**

Day: **2**

Donnerstag, 12. April 2018

Aufgabe 4. Ein *Domino* ist ein 1×2 oder 2×1 Stein.

Sei $n \geq 3$ eine natürliche Zahl. Dominos werden auf einem $n \times n$ Brett so platziert, dass jeder Domino genau zwei Felder des Brettes überdeckt, und Dominos sich nicht überlappen.

Der *Wert* einer Zeile oder Spalte ist die Anzahl der Dominos, die mindestens ein Feld dieser Zeile oder Spalte überdecken. Eine Anordnung heißt (heisst) *ausbalanciert*, wenn ein $k \geq 1$ existiert, sodass jede Zeile und jede Spalte den Wert k hat.

Zeige, dass für jedes $n \geq 3$ eine ausbalancierte Anordnung existiert, und bestimme die kleinstmögliche Anzahl Dominos, die für eine solche Anordnung benötigt wird.

Aufgabe 5. Sei Γ der Umkreis des Dreiecks ABC. Ein Kreis Ω berühre die Strecke AB und berühre Γ in einem Punkt, der auf derselben Seite der Geraden AB wie C liege. Die Winkelhalbierende (Winkelsymmetrale) von $\measuredangle BCA$ schneide Ω in zwei verschiedenen Punkten P und Q.

Zeige, dass $\measuredangle ABP = \measuredangle QBC$.

Aufgabe 6.

(a) Zeige, dass für jede reelle Zahl t mit $0 < t < \frac{1}{2}$ eine positive ganze Zahl n mit der folgenden Eigenschaft existiert: Für jede Menge S von n positiven ganzen Zahlen existieren zwei verschiedene Elemente x und y in S, und eine *nicht-negative* ganze Zahl m (d.h. $m \geq 0$), sodass

$$|x - my| \leq ty.$$

(b) Bestimme, ob für jede reelle Zahl t mit $0 < t < \frac{1}{2}$ eine unendliche Menge S von positiven ganzen Zahlen existiert, sodass

$$|x - my| > ty$$

für jedes Paar verschiedener Elemente x und y in S und jede *positive* ganze Zahl m (d.h. $m > 0$) gilt.

Zeit: 4 Stunden und 30 Minuten
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.