Jeudi 12 avril 2018

Problème 4. Un *domino* est une pièce 1×2 ou 2×1. Soit un entier $n \geqslant 3$. Des dominos sont disposés sur un échiquier $n \times n$ de manière à ce que chaque domino couvre exactement deux cases et que deux dominos ne se recouvrent pas.
La *valeur* d'une ligne ou d'une colonne est le nombre de dominos qui couvrent au moins une case de cette ligne ou colonne. Une configuration est dite *équilibrée* s'il existe un $k \geqslant 1$ tel que chaque ligne et chaque colonne ait une valeur de k.
Montrer qu'il existe une configuration équilibrée pour tout $n \geqslant 3$, et trouver le nombre minimal de dominos nécessaires dans une telle configuration.

Problème 5. Soit Γ le cercle circonscrit au triangle ABC. Un cercle Ω est tangent au segment $[AB]$ et tangent à Γ en un point situé du même côté de la droite AB que C. La bissectrice de $\widehat{BCA}$ coupe Ω en deux points distincts P et Q.
Montrer que $\widehat{ABP} = \widehat{QBC}$.

Problème 6.

(a) Prouver que, pour tout réel t tel que $0 < t < \frac{1}{2}$, il existe un entier strictement positif n vérifiant la propriété suivante : pour tout ensemble S de n entiers strictement positifs, il existe deux éléments distincts x et y de S et un entier *positif* m (i.e. $m \geqslant 0$) tel que

$$|x - my| \leqslant ty.$$

(b) Déterminer si pour tout réel t tel que $0 < t < \frac{1}{2}$ il existe un ensemble infini S d'entiers strictement positifs tel que

$$|x - my| > ty$$

pour toute paire d'éléments distincts x et y de S et tout entier m *strictement positif* (i.e. $m > 0$).

Durée: 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points.