Language: **Finnish**

Day: **2**

Torstaina 12.4.2018

Tehtävä 4. *Domino* on 1×2- tai 2×1-laatta.

Olkoon $n \geq 3$ kokonaisluku. Dominoita asetetaan $n \times n$-laudalle siten, että jokainen domino peittää täsmälleen kaksi laudan ruutua ja dominot eivät mene päällekkäin.

Rivin tai sarakkeen *arvo* on niiden dominoiden lukumäärä, jotka peittävät vähintään yhden kyseisen rivin tai sarakkeen ruuduista. Dominoiden asettelua kutsutaan *tasapainoiseksi*, jos on olemassa $k \geq 1$ niin, että jokaisen rivin ja jokaisen sarakkeen arvo on k.

Osoita, että kaikilla $n \geq 3$ on olemassa tasapainoinen asettelu ja määritä pienin mahdollinen määrä dominoita, joka tarvitaan sellaiseen asetteluun.

Tehtävä 5. Olkoon Γ kolmion ABC ympäri piirretty ympyrä. Ympyrä Ω sivuaa janaa AB ja lisäksi se sivuaa ympyrää Γ pisteessä, joka on janan AB samalla puolella kuin piste C. Kulman $\angle BCA$ puolittaja leikkaa ympyrän Ω kahdessa eri pisteessä P ja Q.

Osoita, että $\angle ABP = \angle QBC$.

Tehtävä 6.

(a) Osoita, että kaikilla reaaliluvuilla t, jotka toteuttavat ehdon $0 < t < \frac{1}{2}$, on olemassa positiivinen kokonaisluku n, jolla on seuraava ominaisuus: kun S on mikä tahansa n positiivisen kokonaisluvun joukko, niin on olemassa kaksi keskenään eri suurta alkiota x ja y, jotka kuuluvat joukkoon S ja lisäksi on olemassa *epänegatiivinen* kokonaisluku m (eli $m \geq 0$), joilla

$$|x - my| \leq ty.$$

(b) Onko kaikilla ehdon $0 < t < \frac{1}{2}$ toteuttavilla reaaliluvuilla t olemassa ääretön positiivisten kokonaislukujen joukko S, jolla ehto

$$|x - my| > ty$$

toteutuu kaikilla joukon S eri alkioista x ja y muodostuvilla pareilla ja kaikilla *positiivisilla* kokonaisluvuilla m (eli $m > 0$)?

Aika: 4 tuntia ja 30 minuuttia
Jokainen tehtävä on seitsemän pisteen arvoinen