Donderdag 12 april 2018

Opgave 4. Een *domino* is een 1×2- of 2×1-tegel.

Zij $n \geq 3$ een geheel getal. Er worden domino's op een $n \times n$-bord gelegd zodat elke domino precies twee vakjes van het bord bedekt en de domino's niet overlappen.

De *waarde* van een rij of kolom is het aantal domino's dat minstens één vakje in die rij of kolom bedekt. Het $n \times n$-bord met domino's heet *gebalanceerd* als er een $k \geq 1$ bestaat zodat elke rij en elke kolom waarde k heeft.

Bewijs dat er voor elke $n \geq 3$ een gebalanceerd $n \times n$-bord met domino's bestaat, en bepaal het minimale aantal domino's dat nodig is voor zo'n gebalanceerd $n \times n$-bord.

Opgave 5. Zij Γ de omgeschreven cirkel van driehoek ABC. Een cirkel Ω raakt aan lijnstuk AB en raakt verder aan Γ in een punt dat aan dezelfde kant van lijn AB ligt als C. De bissectrice van $\angle BCA$ snijdt Ω in twee verschillende punten P en Q.

Bewijs dat $\angle ABP = \angle QBC$.

Opgave 6.

(a) Bewijs dat voor elk reëel getal t met $0 < t < \frac{1}{2}$ er een positief geheel getal n bestaat met de volgende eigenschap: voor elke verzameling S van n positieve gehele getallen bestaan er twee verschillende elementen x en y van S en een *niet-negatief* geheel getal m (d.w.z. $m \geq 0$) zodat

$$|x - my| \leq ty.$$

(b) Bepaal of er voor elk reëel getal t met $0 < t < \frac{1}{2}$ een oneindige verzameling S van positieve gehele getallen bestaat zodat

$$|x - my| > ty$$

voor elke twee verschillende elementen x en y van S en elk *positief* geheel getal m (d.w.z. $m > 0$).

Beschikbare tijd: 4 uur en 30 minuten
Elke opgave is 7 punten waard