Čtvrtek, duben 12, 2018

Úloha 4. *Domino* je kostka 1×2 nebo 2×1.

Nechť $n \geq 3$ je přirozené číslo. Kostky domina se umísťují na desku s $n \times n$ políčky takovým způsobem, že každé domino pokrývá přesně dvě políčka na desce a žádná dvě domina se ani částečně nepřekrývají.

Hodnota řady nebo sloupce na desce je počet kostek domina, které pokrývají aspoň jedno políčko této řady nebo tohoto sloupce. Konfigurace kostek domin se nazývá *vybalancovaná*, právě když existuje nejaké přirozené číslo $k \geq 1$ takové, že každá řada a každý sloupec má hodnotu k.

Dokažte, že vybalancovaná konfigurace existuje pro každé $n \geq 3$, a najděte minimální počet kostek domina potřebných pro takovou konfiguraci.

Úloha 5. Nechť Γ je kružnice opsaná trojúhelníku ABC. Kružnice Ω se dotýká úsečky AB a kružnice Γ v bodě ležícím ve stejné polorovině ohraničené přímkou AB, jako leží bod C. Osa úhlu $\angle BCA$ protíná kružnici Ω ve dvou různých bodech P and Q.

Dokažte, že $|\angle ABP| = |\angle QBC|$.

Úloha 6.

(a) Dokažte, že pro každé reálné číslo t, $0 < t < \frac{1}{2}$, existuje kladné celé číslo n s následující vlastností: Pro každou množinu S sestávající z n kladných celých čísel existují dva různé prvky x a y množiny S a nezáporné celé číslo m (tj. $m \geq 0$) takové, že

$$|x - my| \leq ty.$$

(b) Určete, zda pro každé reálné číslo t, $0 < t < \frac{1}{2}$, existuje nekonečná množina S kladných přirozených čísel taková, že

$$|x - my| > ty$$

pro každou dvojici různých prvků x a y množiny S a každé kladné celé číslo m (tj. $m > 0$).

Time: 4 hodiny 30 minut

Každá úloha je hodnocena maximálně 7 body