



EGMO 2018  
Florence | April 9<sup>th</sup>-15<sup>th</sup>

Language: **Ukrainian**

Day: **1**

Середа, 11 квітня, 2018 р.

**Задача 1.** У трикутнику  $ABC$  відомо, що  $CA = CB$  і  $\angle ACB = 120^\circ$ . Через  $M$  позначимо середину сторони  $AB$ . Нехай  $P$  – деяка точка описаного кола трикутника  $ABC$  та  $Q$  – точка на відрізку  $CP$ , що задовольняє умові  $QP = 2QC$ . Пряма, що перпендикулярна до  $AB$  та проходить через точку  $P$ , перетинає пряму  $MQ$  в єдиній точці  $N$ .

Доведіть, що існує таке коло, що  $N$  належить цьому колу при всіх можливих розташуваннях точки  $P$ .

**Задача 2.** Розглянемо множину

$$A = \left\{ 1 + \frac{1}{k} : k = 1, 2, 3, \dots \right\}.$$

- (a) Доведіть, що довільне ціле число  $x \geq 2$  може бути подано у вигляді добутку одного або декількох (не обов'язково різних) елементів з  $A$ .
- (b) Для кожного цілого  $x \geq 2$ , через  $f(x)$  позначимо мінімальне ціле число таке, що  $x$  може бути подано у вигляді добутку  $f(x)$  елементів (не обов'язково різних) з  $A$ .

Доведіть, що існує нескінченно багато пар цілих чисел  $(x, y)$ , для яких  $x \geq 2$ ,  $y \geq 2$  та

$$f(xy) < f(x) + f(y).$$

(Пари  $(x_1, y_1)$  та  $(x_2, y_2)$  різні якщо  $x_1 \neq x_2$  або  $y_1 \neq y_2$ ).

**Задача 3.** Через  $C_1, \dots, C_n$  позначимо  $n$  учасниць EGMO. Після змагання вони шикуються в чергу перед рестораном у відповідності до таких правил.

- Журі обирає початкове розташування учасниць у черзі.
- Кожної хвилини журі вибирає ціле число  $i$ , що задовольняє умову  $1 \leq i \leq n$ :
  - якщо перед учасницею  $C_i$  знаходиться принаймні  $i$  інших учасниць, то вона сплачує одне євро журі і переміщується вперед в черзі рівно на  $i$  позицій;
  - якщо перед учасницею  $C_i$  знаходиться менше ніж  $i$  інших учасниць, то ресторан відкривається і процес закінчується.

- (a) Доведіть, що такий процес не може тривати нескінченно довго, незалежно від дій журі.
- (b) Для кожного  $n$  визначте найбільшу кількість євро, що журі може отримати, обираючи початкове розташування і порядок переміщень.

Language: Ukrainian

Час: 4 години 30 хвилин  
Кожна задача оцінюється в 7 балів