



EGMO 2018  
Florence | April 9<sup>th</sup>-15<sup>th</sup>

Language: Turkish

Day: 1

Çarşamba, 11 Nisan, 2018

**Soru 1.** Bir  $ABC$  üçgeninde  $|CA| = |CB|$ ,  $\angle ACB = 120^\circ$  ve  $[AB]$  kenarının orta noktası  $M$  dir.  $P$ ,  $ABC$  üçgeninin çevrel çemberinin üzerinde bulunan bir değişken nokta olmak üzere,  $[CP]$  üzerindeki  $Q$  noktası  $|QP| = 2|QC|$  koşulunu sağlasın.  $P$  noktasından geçen ve  $AB$  ye dik olan doğruyla  $MQ$  doğrusunun kesiştiği tek nokta  $N$  olsun.

$P$  noktası nerede alınrsa alınsın,  $N$  noktasının sabit bir çember üzerinde bulunacağını gösteriniz.

**Soru 2.**  $A$  kümesi

$$A = \left\{ 1 + \frac{1}{k} : k = 1, 2, 3, \dots \right\}.$$

şeklinde tanımlanmıştır.

- (a) Her  $x \geq 2$  tam sayısının  $A$  nın bir veya birkaç elemanının çarpımı şeklinde yazılabileceğini gösteriniz (çarpanlar birbirinden farklı olma zorunda değildir).
- (b) Her  $x \geq 2$  tam sayısı için,  $f(x)$  sayısı öyle en küçük tam sayı olsun ki,  $x$  sayısı  $A$  nın  $f(x)$  tane elemanının çarpımı şeklinde gösterilebilsin (çarpanlar birbirinden farklı olma zorunda değildir).
- $x \geq 2, y \geq 2$  olmak üzere, sonsuz tane  $(x, y)$  ikilisi için

$$f(xy) < f(x) + f(y)$$

olduğunu gösteriniz.

$((x_1, y_1)$  ve  $(x_2, y_2)$  ikililerinin farklı olması için  $x_1 \neq x_2$  veya  $y_1 \neq y_2$  olmalıdır).

**Soru 3.** EGMO nun  $n$  yarışmacısının isimleri  $C_1, \dots, C_n$  dir. Yarışmadan sonra yarışmacılar aşağıdaki kurallara göre yemekhanenin önünde bir kuyruk oluşturacak şekilde dizilmişler.

- Yarışmacıların başlangıçta buldukları kuyruk Jüri tarafından belirleniyor.
- Her dakika, Jüri  $1 \leq i \leq n$  olmak üzere bir  $i$  tam sayısı seçiyor.
  - $C_i$  isimli yarışmacının önünde en az  $i$  yarışmacı bulunuyorsa bu yarışmacı Jüri ye bir Euro para ödüyor ve önündeki tam olarak  $i$  kişinin önüne geçiyor.
  - $C_i$  isimli yarışmacının önünde  $i$  den daha az yarışmacı bulunuyorsa yemekhanenin kapıları açılıyor ve süreç tamamlanıyor.

- (a) Jüri nasıl kararlar alırsa alsın bu sürecin sonsuza dek devam edemeyeceğini gösteriniz.
- (b) Verilmiş her  $n$  sayısı için Jüri başlangıçtaki dizilişi ve yapacağı hamle dizisini akıllıca seçerek en fazla kaç Euro para toplayabilir?

Language: Turkish

Süre: 4 saat 30 dakikadır.  
Her soru 7 puan değerindedir.