



EGMO 2018  
Florence | April 9<sup>th</sup>-15<sup>th</sup>

Language: **Serbian**

Day: **1**

sreda, 11.4.2018.

**Zadatak 1.** Neka je  $ABC$  trougao u kome važi  $CA = CB$  i  $\angle ACB = 120^\circ$ , i neka je  $M$  središte stranice  $AB$ . Neka je  $P$  tačka na kružnici opisanoj oko trougla  $ABC$ , i neka je  $Q$  tačka na duži  $CP$  tako da važi  $QP = 2QC$ . Dato je da prava kroz tačku  $P$  koja je normalna na pravu  $AB$  seče pravu  $MQ$  u jedinstvenoj tački  $N$ .

Dokazati da postoji kružnica takva da joj tačka  $N$  pripada za sve moguće pozicije tačke  $P$ .

**Zadatak 2.** Dat je skup

$$A = \left\{ 1 + \frac{1}{k} : k = 1, 2, 3, \dots \right\}.$$

- (a) Dokazati da se svaki prirodan broj  $x \geq 2$  može napisati kao proizvod jednog ili više elemenata skupa  $A$ , koji ne moraju biti različiti.
- (b) Za svaki prirodan broj  $x \geq 2$ , neka je  $f(x)$  najmanji prirodan broj takav da se  $x$  može napisati kao proizvod  $f(x)$  elemenata skupa  $A$ , koji ne moraju biti različiti.

Dokazati da postoji beskonačno mnogo parova  $(x, y)$  prirodnih brojeva za koje važi  $x \geq 2, y \geq 2$ , i

$$f(xy) < f(x) + f(y).$$

(Parovi  $(x_1, y_1)$  i  $(x_2, y_2)$  su različiti ako i samo ako  $x_1 \neq x_2$  ili  $y_1 \neq y_2$ ).

**Zadatak 3.** Označimo  $n$  takmičarki EGMO-a sa  $C_1, \dots, C_n$ . Posle takmičenja, one staju u red ispred restorana u skladu sa sledećim pravilima.

- Komisija bira početni redosled takmičarki u redu.
- Svakog minuta Komisija bira prirodan broj  $i$ , tako da  $1 \leq i \leq n$ .
  - Ako se ispred takmičarke  $C_i$  nalazi bar  $i$  drugih takmičarki, ona plaća jedan evro Komisiji i pomera se prema početku reda za tačno  $i$  pozicija.
  - Ako se ispred takmičarke  $C_i$  nalazi manje od  $i$  drugih takmičarki, restoran se otvara i proces se završava.

- (a) Dokazati da ovaj proces ne može trajati beskonačno, bez obzira na izbore Komisije.
- (b) Odrediti za svako  $n$  najveći broj evra koje Komisija može da prikupi prefrigano birajući početni raspored i izabrane brojeve.

Language: Serbian

Vreme: 4 sata i 30 minuta  
Svaki zadatak vredi 7 poena.