



EGMO 2018
Florence | April 9th-15th

Language: Romanian

Day: 1

Miercuri, 11 aprilie, 2018

Problema 1. Fie ABC un triunghi cu $CA = CB$ și $\angle ACB = 120^\circ$ și fie M mijlocul segmentului AB . Fie P un punct variabil pe cercul circumscris triunghiului ABC și fie Q punctul de pe segmentul CP pentru care $QP = 2QC$. Perpendiculara pe AB , dusă prin P , intersectează dreapta MQ într-un unic punct N .

Demonstrați că există un cerc fix astfel încât N este situat pe acest cerc, pentru toate pozițiile posibile ale lui P .

Problema 2. Considerăm mulțimea

$$A = \left\{ 1 + \frac{1}{k} : k = 1, 2, 3, \dots \right\}.$$

- (a) Demonstrați că fiecare număr întreg $x \geq 2$ poate fi scris ca produsul a unuia sau mai multe elemente ale lui A , nu neapărat diferite.
- (b) Pentru fiecare număr întreg $x \geq 2$, notăm cu $f(x)$ cel mai mic număr întreg pentru care x poate fi scris ca produs de $f(x)$ elemente ale lui A , nu neapărat diferite.

Demonstrați că există o infinitate de perechi (x, y) de numere întregi, cu $x \geq 2$, $y \geq 2$ și

$$f(xy) < f(x) + f(y).$$

(Perechile (x_1, y_1) și (x_2, y_2) sunt diferite dacă $x_1 \neq x_2$ sau $y_1 \neq y_2$.)

Problema 3. Cele n concurenți la EGMO sunt identificate cu numele C_1, \dots, C_n . După concurs ele sunt așezate la rând la ușa restaurantului, una câte una, după următoarele reguli.

- Juriul alege ordinea inițială în rând a concurenților.
- În fiecare minut juriul alege un întreg i cu $1 \leq i \leq n$.
 - În cazul în care concurenta C_i are cel puțin i alte concurenți înaintea ei, ea plătește un euro juriului și avansează în rând cu exact i poziții.
 - În cazul în care concurenta C_i are mai puțin de i alte concurenți înaintea ei, restaurantul se deschide și procesul se termină.

- (a) Demonstrați că procesul nu poate continua la nesfârșit, indiferent de alegerile juriului.
- (b) Pentru fiecare n , determinați numărul maxim de euro pe care îl poate obține juriul, alegând în mod adecvat ordinea inițială în rând și succesiunea de mișcări ulterioare.

Language: Romanian

Timp: 4 ore și 30 de minute
Fiecare problemă valorează 7 puncte