



EGMO 2018
Florence | April 9th-15th

Language: Norwegian

Day: 1

Onsdag 11. april 2018

Oppgave 1. La ABC være en trekant med $CA = CB$ og $\angle ACB = 120^\circ$, og la M være midtpunktet på linjestykket AB . La P være et punkt på omsirkelen til ABC , og la Q være punktet på linjestykket CP som oppfyller $QP = 2QC$. Det er gitt at normalen fra P til AB skjærer linjen MQ i nøyaktig et punkt N .

Vis at det finnes en sirkel som ikke avhenger av punktet P 's plassering, slik at uansett hvordan man velger punktet P vil N ligge på denne sirkelen.

Oppgave 2. Betrakt mengden

$$A = \left\{ 1 + \frac{1}{k} : k = 1, 2, 3, \dots \right\}.$$

- (a) Vis at alle heltall $x \geq 2$ kan skrives som produktet av en eller flere elementer fra A , der tallene i produktet ikke nødvendigvis trenger å være forskjellige.
- (b) For alle heltall $x \geq 2$, la $f(x)$ være det minste tallet slik at x kan skrives som et produkt av $f(x)$ elementer fra A , der tallene i produktet ikke nødvendigvis trenger å være forskjellige.

Vis at det finnes uendelig mange par (x, y) av heltall med $x \geq 2$, $y \geq 2$ og

$$f(xy) < f(x) + f(y).$$

(To par (x_1, y_1) og (x_2, y_2) regnes som forskjellige dersom $x_1 \neq x_2$ eller $y_1 \neq y_2$.)

Oppgave 3. De n deltakerne på EGMO kalles C_1, \dots, C_n . Etter konkurransen stiller deltakerne seg i kø foran restauranten etter følgende regler.

- Juryen velger startrekkefølgen til deltakerne.
- Hvert minutt velger juryen et heltall i med $1 \leq i \leq n$.
 - Hvis deltaker C_i har minst i deltakere foran seg i køen, så betaler hun én euro til juryen og flytter seg nøyaktig i plasser fremover i køen.
 - Hvis deltaker C_i har mindre enn i deltakere foran seg i køen, så åpner restauranten og prosessen tar slutt.

(a) Vis at denne prosessen alltid må ta slutt, uansett hvilke valg juryen tar.

(b) For hver n , bestem det største antallet euro juryen kan klare å samle sammen.

Language: Norwegian

Tid til rådighet: 4 timer og 30 minutter
Hver oppgave er verdt 7 poeng