



EGMO 2018  
Florence | April 9<sup>th</sup>-15<sup>th</sup>

Language: Italian

Day: 1

Mercoledì 11 aprile 2018

**Problema 1.** Sia  $ABC$  un triangolo con  $CA = CB$  e  $\angle ACB = 120^\circ$ , e sia  $M$  il punto medio di  $AB$ . Sia  $P$  un punto che varia sulla circonferenza circoscritta ad  $ABC$ , e sia  $Q$  il punto sul segmento  $CP$  tale che  $QP = 2QC$ . Si supponga che la retta passante per  $P$  e perpendicolare ad  $AB$  intersechi la retta  $MQ$  in un unico punto  $N$ .

Dimostrare che esiste una circonferenza fissata tale che  $N$  giace su questa circonferenza per tutte le possibili scelte di  $P$ .

**Problema 2.** Si consideri l'insieme

$$A = \left\{ 1 + \frac{1}{k} : k = 1, 2, 3, \dots \right\}.$$

- (a) Dimostrare che ogni intero  $x \geq 2$  può essere scritto come prodotto di uno o più elementi di  $A$ , non necessariamente distinti.
- (b) Per ogni intero  $x \geq 2$ , sia  $f(x)$  il minimo intero tale che  $x$  può essere scritto come prodotto di  $f(x)$  elementi di  $A$ , non necessariamente distinti.

Dimostrare che esistono infinite coppie di interi  $(x, y)$  con  $x \geq 2$  e  $y \geq 2$  tali che

$$f(xy) < f(x) + f(y).$$

(Le coppie  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  sono diverse se e solo se  $x_1 \neq x_2$  o  $y_1 \neq y_2$ .)

**Problema 3.** Le  $n$  concorrenti di una EGMO si chiamano  $C_1, \dots, C_n$ . Dopo la gara, si mettono in coda davanti al ristorante rispettando le seguenti regole.

- La Giuria decide l'ordine iniziale delle concorrenti nella coda.
- Ogni minuto, la Giuria sceglie un intero  $i$  con  $1 \leq i \leq n$ .
  - Se la concorrente  $C_i$  ha almeno altre  $i$  concorrenti di fronte a lei, paga un euro alla Giuria e si sposta in avanti nella coda di esattamente  $i$  posizioni.
  - Se la concorrente  $C_i$  ha meno di altre  $i$  concorrenti di fronte a lei, il ristorante apre e il processo termina.

- (a) Dimostrare che il processo non può andare avanti all'infinito, indipendentemente dalle scelte della Giuria.
- (b) Determinare per ogni  $n$  il massimo numero di euro che la Giuria può ottenere scegliendo astutamente l'ordine iniziale e la sequenza di mosse.

Language: Italian

Tempo a disposizione: 4 ore e 30 minuti  
Ogni problema vale 7 punti