2018. Április 11., szerda

1. Feladat Legyen az ABC háromszögben $CA = CB$ és $ACB\sphericalangle = 120°$, valamint az AB szakasz felezőpontja M. Tekintsük az ABC háromszög körülírt körének valamely P pontját, és legyen Q a CP szakasz azon pontja, melyre $QP = 2QC$. A P-n áthaladó és AB-re merőleges egyenesre teljesül, hogy az MQ egyenest egyetlen pontban, az N-ben metszi.

Igazoljuk, hogy létezik egy olyan rögzített kör, melynek N a pontja lesz minden feltételek szerint felvett P esetén.

2. Feladat Tekintsük az alábbi halmazt:

$$A = \left\{1 + \frac{1}{k} : k = 1, 2, 3, \ldots\right\}.$$

(a) Igazoljuk, hogy minden $x \geq 2$ egész szám felírható az A halmaz egy vagy több, nem feltétlenül különböző elemének szorzataként.

(b) Minden $x \geq 2$ egész esetén jelölje $f(x)$ a legkisebb egész számot, melyre x felírható az A halmaz $f(x)$ darab, nem feltétlen különböző elemének szorzataként.

Igazoljuk, hogy létezik végtelen sok olyan egészekből álló (x, y) számpár, melyre $x \geq 2$, $y \geq 2$ és

$$f(xy) < f(x) + f(y).$$

(Az (x_1, y_1) és az (x_2, y_2) párok akkor különbözőek, ha $x_1 \neq x_2$ vagy $y_1 \neq y_2$.)

3. Feladat Hívjuk az EGMO n versenyzőjét $C_1, \ldots, C_n$-nek. A versenyt követően az ebédlő előtt egy sorba állnak be a következő szabályok szerint.

- A Zsűri egy kezdeti sorrendet választ a versenyzőknek a sorban.
- Minden percben választ a Zsűri egy i egész számot, melyre $1 \leq i \leq n$.
  - Amennyiben a C_i versenyző előtt legalább i másik versenyző áll a sorban, akkor fizet egy eurót a Zsűrinek és a sorban előrehalad úgy, hogy pontosan az előtte álló i versenyzőt előzze meg.
  - Amennyiben a C_i versenyző előtt kevesebb mint i másik versenyző áll a sorban, megnyitják az ebédlőt, és a folyamat véget ér.

(a) Bizonyítsuk be, hogy akármilyen választásokat hoz is a Zsűri, a folyamat nem tarthat a végtelenségig.

(b) Határozzuk meg minden n esetén, hogy a kezdeti sorrend és az előrehaladó versenyzők megfelelő választásai mellett a Zsűri legfeljebb mennyi eurót tud gyűjteni.

Megoldási idő: 4 óra 30 perc.
Minden feladat 7 pontot ér.