יום רביעי, 11 באפריל, 2018

שאלה 1. יהא ABC משולש בו $CA = CB$ וכן $\angle ACB = 120^\circ$, ותהא M אמצע AB. תהא P נקודה משתנה על המעגל החוסם של ABC, ותהא Q הנקודה על הקטע CP עבורה מתקיים $QP = 2QC$. נתון כי הישר שעובר דרך P ומאונך ל-AB נחתך עם הישר MQ בנקודה היחידה N.

הוכיחי כי קיים מעגל קבוע אשר הנקודה N נמצאת עליו לכל המיקומים האפשריים של P.

שאלה 2. נתבונן בקבוצה

$$A = \left\{1 + \frac{1}{k} : k = 1,2,3, \dots\right\}.$$

(א) הוכיחי כי כל שלם $x \geq 2$ ניתן להצגה כמכפלה של אחד או יותר מאיברי A, שאינם בהכרח שונים זה מזה.

(ב) לכל שלם $x \geq 2$, נסמן ב-$f(x)$ את השלם המינימלי עבורו ניתן להציג את x כמכפלה של $f(x)$ מאיברי A, שאינם בהכרח שונים זה מזה.

הוכיחי כי קיימים אינסוף זוגות (x, y) של שלמים עם $x \geq 2$, $y \geq 2$ וכן

$$f(xy) < f(x) + f(y).$$

(הזוגות (x_1, y_1) ו-(x_2, y_2) נחשבים שונים אם $x_1 \neq x_2$ או $y_1 \neq y_2$.)

שאלה 3. ב-EGMO משתתפות n מתחרות, ששמותיהן $C_1, \dots, C_n$. לאחר התחרות הן ממתינות בתור בכניסה למסעדה, אחת מאחורי השנייה, בהתאם לכללים הבאים:

- ועד מנהיגי הנבחרות בוחר את הסדר ההתחלתי של המתחרות בתור.
- בכל דקה, הועד בוחר מספר שלם i עם $1 \leq i \leq n$.
  - אם המתחרה C_i עומדת מאחורי לפחות i מתחרות אחרות, היא משלמת לועד אירו בודד ומתקדמת בתור בדיוק ב-i מקומות.
  - אם המתחרה C_i עומדת מאחורי פחות מ-i מתחרות אחרות, דלתות המסעדה נפתחות והתהליך מסתיים.

(א) הוכיחי כי התהליך לא יכול להמשך לנצח, ללא תלות בבחירות הועד.

(ב) מצאי לכל n את כמות האירו המקסימלית שהועד יכול לגבות באמצעות בחירה ערמומית של הסדר ההתחלתי ושל סדרת המהלכים.

Language: Hebrew

משך הבחינה 4 שעות ו-30 דקות
כל שאלה שווה 7 נקודות