EGMO 2018

Florence | April 9th-15th

Mercredi 11 avril 2018

Problème 1. Soit ABC un triangle tel que $CA = CB$ et $\widehat{ACB} = 120°$ et soit M le milieu du segment $[AB]$. Soit P un point variable sur le cercle circonscrit à ABC et soit Q le point du segment $[CP]$ tel que $QP = 2QC$. La perpendiculaire à la droite AB passant par P coupe la droite MQ en un unique point N.
Montrer qu'il existe un cercle fixé auquel appartient le point N quelle que soit la position de P.

Problème 2. On considère l'ensemble

$$A = \left\{ 1 + \frac{1}{k} \text{ tel que } k = 1, 2, 3, \ldots \right\}.$$

(a) Montrer que tout entier $x \geqslant 2$ peut s'écrire comme le produit d'un ou de plusieurs éléments de A non nécessairement distincts.

(b) Pour tout entier $x \geqslant 2$, soit $f(x)$ le plus petit entier tel que x s'écrive comme produit de $f(x)$ éléments de A non nécessairement distincts.
Prouver qu'il existe une infinité de paires (x, y) d'entiers tels que $x \geqslant 2$, $y \geqslant 2$ et

$$f(xy) < f(x) + f(y).$$

(Les paires (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont différentes si $x_1 \neq x_2$ ou $y_1 \neq y_2$.)

Problème 3. Les n participantes d'une EGMO se nomment $C_1, \ldots, C_n$. Après la compétition elles font la queue devant le restaurant selon les règles suivantes :

- ♢ Le jury choisit l'ordre initial des participantes dans la queue.
- ♢ Toutes les minutes, le jury choisit un entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$.
  - — S'il y a au moins i autres participantes devant C_i, elle paie un euro au jury et avance d'exactement i places dans la queue.
  - — S'il y a strictement moins de i autres participantes devant C_i, le restaurant ouvre ses portes et le processus s'achève.

(a) Démontrer que le processus ne peut pas durer indéfiniment, quels que soient les choix faits par le jury.

(b) Pour chaque n, déterminer le nombre maximal d'euros que le jury peut récolter en choisissant astucieusement l'ordre initial et la suite des déplacements.

Durée: 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points.