



EGMO 2018
Florence | April 9th-15th

Language: Finnish

Day: 1

Keskiviikkona 11.4.2018

Tehtävä 1. Olkoon ABC kolmio, jossa $CA = CB$ ja $\angle ACB = 120^\circ$, ja olkoon M janan AB keskipiste. Olkoon piste P kolmion ABC ympäri piirretyllä ympyrällä, ja olkoon Q sellainen piste janalla CP että $QP = 2QC$. Piste P kautta kulkeva suora, joka on kohtisuorassa suoraa AB vasten leikkaa suoran MQ yksikäsitteisessä pisteessä N .

Osoita, että on olemassa sellainen ympyrä, jolla piste N on aina riippumatta pisteen P sijainnista.

Tehtävä 2. Tarkastellaan joukkoa

$$A = \left\{ 1 + \frac{1}{k} : k = 1, 2, 3, \dots \right\}.$$

- (a) Osoita, että jokainen kokonaisluku $x \geq 2$ voidaan esittää joukon A yhden tai useamman alkion tulona, missä näiden alkioiden ei välttämättä tarvitse olla keskenään erisuuria.
- (b) Kun $x \geq 2$ kokonaisluku, olkoon $f(x)$ pienin sellainen kokonaisluku, että x voidaan kirjoittaa joukon A alkioiden tulona niin, että tulontekijöiden määrä on $f(x)$, ja tulontekijät eivät välttämättä ole keskenään erisuuria.

Osoita, että on olemassa äärettömän monta kokonaislukuparia (x, y) , joilla $x \geq 2$, $y \geq 2$, ja

$$f(xy) < f(x) + f(y).$$

(Parit (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) ovat erisuuria, jos ja vain jos $x_1 \neq x_2$ tai $y_1 \neq y_2$.)

Tehtävä 3. Olkoot C_1, \dots, C_n EGMO:n n kilpailijaa. Kilpailun jälkeen kilpailijat jonottavat ravintolan edessä seuraavien sääntöjen mukaisesti.

- Tuomaristo valitsee kilpailijoiden alkuperäisen järjestyksen.
- Kerran minuutissa tuomaristo valitsee kokonaisluvun i , joka toteuttaa ehdon $1 \leq i \leq n$.
 - Jos kilpailijan C_i edessä on vähintään i kilpailijaa, kilpailija C_i maksaa yhden euron tuomaristolle ja siirtyy jonossa eteenpäin i paikkaa.
 - Jos kilpailijan C_i edessä on vähemmän kuin i kilpailijaa, ravintola aukeaa ja prosessi loppuu.

- (a) Osoita, että riippumatta siitä mitä päätöksiä tuomaristo tekee, on prosessin ennen pitkää loputtava.
- (b) Määritä kaikilla luvun n arvoilla suurin mahdollinen määrä euroja, jonka tuomaristo voi kerätä valitsemalla ovelasti alkuperäisen järjestyksen ja siirrot.

Language: Finnish

Aika: 4 tuntia ja 30 minuuttia
Jokainen tehtävä on seitsemän pisteen arvoinen