Středa, duben 11, 2018

Úloha 1. V trojúhelníku ABC je $|CA| = |CB|$ a $|\angle ACB| = 120^\circ$ a M je střed strany AB. Nechť P je libovolný bod na kružnici opsané trojúhelníku ABC a Q bod na úsečce CP takový, že $|QP| = 2|QC|$. A nechť přímka procházející bodem P a kolmá na přímku AB protne přímku MQ v bodě N.

Dokažte, že existuje určitá kružnice, na které leží všechny body N pro všechny možné polohy bodu P.

Úloha 2. Uvažujme množinu

$$A = \left\{ 1 + \frac{1}{k} : k = 1, 2, 3, \ldots \right\}.$$

(a) Dokažte, že každé přirozené číslo $x \geq 2$ může být napsáno jako součin jednoho nebo více prvků z A, které nemusejí být nutně různé.

Součin jednoho prvku znamená ten prvek sám.

(b) Pro každé přirozené číslo $x \geq 2$ nechť $f(x)$ značí nejmenší přirozené číslo takové, že x může být napsáno jako součin $f(x)$ prvků množiny A, které nemusejí být nutně různé.

Dokažte, že existuje nekonečně mnoho dvojic (x, y) přirozených čísel $x \geq 2$, $y \geq 2$, pro které platí

$$f(xy) < f(x) + f(y).$$

(Dvojice (x_1, y_1) a (x_2, y_2) jsou různé, právě když $x_1 \neq x_2$ nebo $y_1 \neq y_2$.)

Úloha 3. Pojmenujme n soutěžících dívek na EGMO jako $C_1, \ldots, C_n$. Po soutěži se tyto dívky postaví do fronty před restaurací podle následujících pravidel.

- Jury vytvoří počáteční uspořádání dívek ve frontě.
- Každou minutu Jury zvolí jedno přirozené číslo i, kde $1 \leq i \leq n$.
  - Má-li dívka C_i aspoň i jiných dívek před sebou, zaplatí jedno euro na konto Jury a posune se dopředu v řadě přesně o i míst.
  - Má-li dívka C_i méně než i jiných dívek před sebou, restaurace otevře a proces skončí.

(a) Dokažte, že proces nemůže pokračovat do nekonečna podle pravidel Jury.

(b) Určete pro každé n největší počet eur, které Jury může získat pro libovolné počáteční uspořádání fronty i pro libovolnou volbu posloupnosti přemísťování dívek.

Time: 4 hodiny 30 minut
Každá úloha je hodnocena maximálně 7 body