



Srijeda, 11. April, 2018.

Problem 1. Dat je jednakokraki trougao ABC ($AC = BC$) kome je $\sphericalangle ACB = 120^\circ$. Neka je M središte stranice AB i P proizvoljna tačka na krugu opisanom oko trougla ABC . Neka je Q tačka koja pripada duži CP , takva da važi $QP = 2QC$. Označimo sa N tačku presjeka prave koja sadrži tačku P i normalna je na AB i prave MQ . Dokazati da tačka N pripada nekom fiksnom krugu, ma kako odabrali tačku P .

Problem 2. Posmatrajmo skup $A = \left\{1 + \frac{1}{k} \mid k = 1, 2, 3, \dots\right\}$.

- Dokazati da se svaki prirodan broj x ($x \geq 2$), može napisati kao proizvod jednog ili više (ne obavezno različitih) elemenata iz A .
- Za svaki prirodan broj x ($x \geq 2$), označimo sa $f(x)$ najmanji prirodan broj takav da se x može napisati kao proizvod $f(x)$ (ne obavezno različitih) elemenata iz A . Dokazati da postoji beskonačno mnogo parova (x, y) prirodnih brojeva ($x \geq 2, y \geq 2$) za koje je

$$f(xy) < f(x) + f(y).$$

(Napomena: Parovi (x_1, y_1) i (x_2, y_2) su različiti ako je $x_1 \neq x_2$ ili $y_1 \neq y_2$.)

Problem 3. Na EGMO učestvuje n takmičarki. Imenujmo ih sa C_1, C_2, \dots, C_n . Nakon takmičenja, žiri će postrojiti takmičarke u red (svaka takmičarka, osim prve, gleda u leđa takmičarki ispred nje) ispred restorana i započeti “proces naplate” po sljedećim pravilima:

- Žiri određuje početni raspored takmičarki u redu.
- Svakog minuta žiri će odabrati prirodan broj i iz skupa $\{1, 2, \dots, n\}$.
- Ako takmičarka C_i ima najmanje i drugih takmičarki ispred sebe, ona će platiti 1 evro žiriju i pomjeriće se za tačno i mjesta naprijed (prema početku reda).
- Ako takmičarka C_i ima manje od i drugih takmičarki ispred sebe, “proces naplate” se završava i sve takmičarke ulaze u restoran.

- Dokazati da “proces naplate” ne može trajati neograničeno dugo.
- Za svaki prirodan broj n , odrediti maksimalan broj evra koji žiri može prikupiti.
(Napomena: Pretpostavlja se da je žiri dovoljno mudar da odabere početni raspored i redosled izvođenja poteza pri naplati, kako bi taj maksimalan broj evra prikupio.)