Середа, 11 квітня, 2018 р.

Задача 1. У трикутнику ABC відомо, що $CA = CB$ і $\angle ACB = 120^\circ$. Через M позначимо середину сторони AB. Нехай P – деяка точка описаного кола трикутника ABC та Q – точка на відрізку CP, що задовольняє умові $QP = 2QC$. Пряма, що перпендикулярна до AB та проходить через точку P, перетинає пряму MQ в єдиній точці N.

Доведіть, що існує таке коло, що N належить цьому колу при всіх можливих розташуваннях точки P.

Задача 2. Розглянемо множину

$$A = \left\{1 + \frac{1}{k} : k = 1, 2, 3, \ldots \right\}.$$

(a) Доведіть, що довільне ціле число $x \geq 2$ може бути подано у вигляді добутку одного або декількох (не обов'язково різних) елементів з A.

(b) Для кожного цілого $x \geq 2$, через $f(x)$ позначимо мінімальне ціле число таке, що x може бути подано у вигляді добутку $f(x)$ елементів (не обов'язково різних) з A.

Доведіть, що існує нескінченно багато пар цілих чисел (x, y), для яких $x \geq 2$, $y \geq 2$ та

$$f(xy) < f(x) + f(y).$$

(Пари (x_1, y_1) та (x_2, y_2) різні якщо $x_1 \neq x_2$ або $y_1 \neq y_2$).

Задача 3. Через $C_1, \ldots, C_n$ позначимо n учасниць EGMO. Після змагання вони шикуються в чергу перед рестораном у відповідності до таких правил.

- Журі обирає початкове розташування учасниць у черзі.
- Кожної хвилини журі вибирає ціле число i, що задовольняє умову $1 \leq i \leq n$:
  - якщо перед учасницею C_i знаходиться принаймні i інших учасниць, то вона сплачує одне євро журі і переміщується вперед в черзі рівно на i позицій;
  - якщо перед учасницею C_i знаходиться менше ніж i інших учасниць, то ресторан відкривається і процес закінчується.

(a) Доведіть, що такий процес не може тривати нескінченно довго, незалежно від дій журі.

(b) Для кожного n визначте найбільшу кількість євро, що журі може отримати, обираючи початкове розташування і порядок переміщень.

Час: 4 години 30 хвилин
Кожна задача оцінюється в 7 балів