

Çarşamba, 11 Nisan, 2018

Soru 1. Bir ABC üçgeninde $|CA| = |CB|$, $\angle ACB = 120^\circ$ ve $[AB]$ kenarının orta noktası M dir. P , ABC üçgeninin çevrel çemberinin üzerinde bulunan bir değişken nokta olmak üzere, $[CP]$ üzerindeki Q noktası $|QP| = 2|QC|$ koşulunu sağlasın. P noktasından geçen ve AB ye dik olan doğruyla MQ doğrusunun kesiştiği tek nokta N olsun.

P noktası nerede alınrsa alınsın, N noktasının sabit bir çember üzerinde bulunacağını gösteriniz.

Soru 2. A kümesi

$$A = \left\{ 1 + \frac{1}{k} : k = 1, 2, 3, \dots \right\}.$$

şeklinde tanımlanmıştır.

- (a) Her $x \geq 2$ tam sayısının A nın bir veya birkaç elemanının çarpımı şeklinde yazılabileceğini gösteriniz (çarpanlar birbirinden farklı olma zorunda değildir).
- (b) Her $x \geq 2$ tam sayısı için, $f(x)$ sayısı öyle en küçük tam sayı olsun ki, x sayısı A nın $f(x)$ tane elemanının çarpımı şeklinde gösterilebilsin (çarpanlar birbirinden farklı olma zorunda değildir).
- $x \geq 2, y \geq 2$ olmak üzere, sonsuz tane (x, y) ikilisi için

$$f(xy) < f(x) + f(y)$$

olduğunu gösteriniz.

$((x_1, y_1)$ ve (x_2, y_2) ikililerinin farklı olması için $x_1 \neq x_2$ veya $y_1 \neq y_2$ olmalıdır).

Soru 3. EGMO nun n yarışmacısının isimleri C_1, \dots, C_n dir. Yarışmadan sonra yarışmacılar aşağıdaki kurallara göre yemekhanenin önünde bir kuyruk oluşturacak şekilde dizilmişler.

- Yarışmacıların başlangıçta buldukları kuyruk Jüri tarafından belirleniyor.
- Her dakika, Jüri $1 \leq i \leq n$ olmak üzere bir i tam sayısı seçiyor.
 - C_i isimli yarışmacının önünde en az i yarışmacı bulunuyorsa bu yarışmacı Jüri ye bir Euro para ödüyor ve önündeki tam olarak i kişinin önüne geçiyor.
 - C_i isimli yarışmacının önünde i den daha az yarışmacı bulunuyorsa yemekhanenin kapıları açılıyor ve süreç tamamlanıyor.

- (a) Jüri nasıl kararlar alırsa alsın bu sürecin sonsuza dek devam edemeyeceğini gösteriniz.
- (b) Verilmiş her n sayısı için Jüri başlangıçtaki dizilişi ve yapacağı hamle dizisini akıllıca seçerek en fazla kaç Euro para toplayabilir?