

Miércoles 11 de abril de 2018

Problema 1. Sea ABC un triángulo con $CA = CB$ y $\angle ACB = 120^\circ$, y sea M el punto medio de AB . Sea P un punto variable de la circunferencia que pasa por A, B y C . Sea Q el punto en el segmento CP tal que $QP = 2QC$. Se sabe que la recta que pasa por P y es perpendicular a la recta AB interseca a la recta MQ en un único punto N .

Demuestre que existe una circunferencia fija tal que N se encuentra en dicha circunferencia para todas las posibles posiciones de P .

Problema 2. Considere el conjunto

$$A = \left\{ 1 + \frac{1}{k} \mid k = 1, 2, 3, \dots \right\}.$$

- (a) Demuestre que todo entero $x \geq 2$ puede ser escrito como el producto de uno o más elementos de A , no necesariamente distintos.
- (b) Para todo entero $x \geq 2$, sea $f(x)$ el menor entero tal que x puede ser escrito como el producto de $f(x)$ elementos de A , no necesariamente distintos.

Demuestre que existen infinitos pares (x, y) de enteros con $x \geq 2, y \geq 2$, tales que

$$f(xy) < f(x) + f(y).$$

Nota: Los pares (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son diferentes si $x_1 \neq x_2$ o $y_1 \neq y_2$.

Problema 3. Las n concursantes de cierta EGMO se llaman C_1, \dots, C_n . Después de la competencia, se ponen en fila fuera del restaurante de acuerdo a las siguientes reglas:

- El Jurado escoge el orden inicial de las concursantes en la fila.
- Cada minuto, el Jurado escoge un entero i con $1 \leq i \leq n$.
 - Si la concursante C_i tiene al menos otras i concursantes delante de ella, le paga un florín¹ al Jurado y se mueve exactamente i posiciones adelante en la fila.
 - Si la concursante C_i tiene menos de i concursantes delante de ella, el restaurante se abre y el proceso termina.

- (a) Demuestre que el proceso no puede continuar indefinidamente, sin importar las elecciones del Jurado.
- (b) Determine para cada n el máximo número de florines que el Jurado puede recolectar escogiendo el orden inicial y la secuencia de movimientos astutamente.

¹Moneda antigua usada en los siglos XIII y XIV en Florencia.