Sreda, 11. april 2018

Naloga 1. Naj bo ABC trikotnik z $CA = CB$ in $\angle ACB = 120^\circ$, in naj bo M razpolovišče daljice AB. Naj bo P premična točka (tj. točka, ki jo lahko premikamo, ni fiksirana) na očrtani krožnici trikotnika ABC, in naj bo Q točka na daljici CP, tako da velja $QP = 2QC$. Dano imamo, da premica skozi P, ki je pravokotna na AB, seka daljico MQ v enolično določeni točki N.

Dokaži, da obstaja fiskna krožnica, tako da N leži na tej krožnici za vse možne položaje točke P.

Naloga 2. Imamo množico

$$A = \left\{1 + \frac{1}{k} : k = 1, 2, 3, \dots\right\}.$$

(a) Dokaži, da lahko poljubno celo število $x \geq 2$ zapišemo kot produkt enega ali večih (ne nujno različnih) elementov iz A.

(b) Za vsako celo število $x \geq 2$ naj $f(x)$ označuje najmanjše celo število, tako da se lahko x zapiše kot produkt $f(x)$ (ne nujno različnih) elementov iz A.

Dokaži, da obstaja neskončno mnogo parov (x, y) celih števil $x \geq 2$, $y \geq 2$, da velja

$$f(xy) < f(x) + f(y).$$

(Para (x_1, y_1) in (x_2, y_2) sta različna, če je $x_1 \neq x_2$ ali $y_1 \neq y_2$).

Naloga 3. Naj bo n tekmovalk na tekmovanju EGMO poimenovanih s $C_1, \dots, C_n$. Po tekmovanju se tekmovalke razporedijo v vrsto pred restavracijo glede na naslednja pravila.

- Žirija izbere začetni vrstni red tekmovalk v vrsti.
- Vsako minuto žirija izbere celo število i, kjer je $1 \leq i \leq n$.
  - Če ima tekmovalka C_i pred seboj vsaj i drugih tekmovalk, plača en euro žiriji in se premakne naprej v vrsti za natanko i mest.
  - Če ima tekmovalka C_i pred seboj manj kot i drugih tekmovalk, se restavracija odpre in postopek se konča.

(a) Dokaži, da se postopek ne more nadaljevati v neskončnost, neodvisno od izbir žirije.

(b) Za vsak n določi največje število eurov, ki jih žirija lahko zbere z zvitim izborom začetnega vrstnega reda vrste in zaporedjem potez.

Čas reševanja: 4 ure 30 minut
Vsaka naloga je vredna 7 točk